2000年南开大学计量经济学考研试题

1．（10分）设一元线性回归模型为 $Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t, E[e_t]=0, E[e_t^2]=\sigma^2$，$t=1,\dots T$，已知 $\hat{b}_0,\hat{b}_1$ 为参数 b_0,b_1 的最小平方估计量，证明：

$$cov(\hat{b}_0,\hat{b}_1) = -\sigma^2 \frac{\bar{X}}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$

其中 $\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$，$x_t = X_t - \bar{X}$.

2．（10分）设线性回归模型为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{T2} & x_{T3} & \cdots & x_{Tk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_T \end{pmatrix}$$

其中 e_t 服从 $N(0,\sigma^2), t=1,\cdots,T$，记 $\beta = (\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_k)'$.

证明：β 的极大似然估计量 $\tilde{\beta}$ 与 σ^2 的极大似然估计量 $\tilde{\sigma}^2$ 是相互独立的.

3．（10分）设线性回归模型为 $Y = X\beta + e$，式中X是可观测的 $(T\times K)$ 设计矩阵，β 是待估计的 $(K\times 1)$ 参数向量，Y是可观测的 $(T\times 1)$ 随机向量，e是不可观测的 $(T\times 1)$ 随机扰动向量，$E[e]=0, E[ee'] = \sigma^2\psi$ 其中 ψ 是已知的对称正定矩阵．写出 β 的最小平方估计量与广义最小平方估计量的表达式，并从极小方差意义上比较两个估计量．

4．（10分）考虑线性回归模型 $Y = X\beta + e = j\beta_1 + x_s\beta_s + e$，式中 $X = (j, x_s)$，$j' = (1,1,\cdots,1), \beta' = (\beta, \beta_s'), E[e] = \mu j, \mu \neq 0, E[(e-\mu j)(e-\mu j)'] = \sigma^2 I$．证明：$\beta$ 的最小平方估计量b具有均值 $E[b] = (\beta_1 + \mu, \beta_s')$ 和方差-协方差矩阵 $\sum_b = \sigma^2(X'X)^{-1}$.

5．（10分）考察消费函数 $c_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \beta_3 w_t + e_t, t=1,\cdots,T$，其中 c_t 为消费支出，y_t 为个人可支配收入，w_t 为消费者的流动资金，$E[e_t]=0$，$E[e_t^2] = \sigma^2 y_t^2$（$\sigma^2$ 为常数），$t=1,\cdots,T$，将上述模型变为同方差模型，并估计参数 β_1,β_2,β_3.

6．（10分）阐明 Golderfeld-Quandt 异方差检验的步骤．

7．（10分）考虑线性回归模型 $Y_t = b_0 + b_1 X_t + e_t, t = 1, \cdots, T$，已知 e_t 具有一阶自回归形式

$$e_t = \rho e_{t-1} + v_t$$

其中 ρ 是未知参数，且 v_t 满足基本假设，利用广义差分变换求参数 $b = (b_0, b_1)'$ 的估计量.

8．（10分）设具有一阶自回归扰动过程的线性回归模型为 $Y = X\beta + e$，$E[e] = 0, E[ee'] = \sigma^2\psi$，这里 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_T)'$，又由具有相同一阶自回归扰动过程的线性模型 $Y_0 = X_0\beta + e_0$ 生成 T_0 个未来观测值组成的向量 $Y_0 = (y_{T+1}, \cdots, y_{T+T_0})', E[e_0] = 0, E[e_0 e_0'] = \sigma^2\psi_0$，并假设 $E[ee_0'] = \sigma^2 V$，求 Y_0 的无偏预测量 $\hat{Y}_0$.

9．（10分）考虑线性回归模型 $y_t = \beta_1 + x_{t_2}\beta_2 + x_{t_3}\beta_3 + e_t, t = 1, \cdots, T$，假设位置参数 β_1, β_2 和 β_3 对 t=1,2 对应的观测值和其余 (T-2) 个观测值不同，对这种情况写出虚变量模型，并讨论参数估计中的困难.

10．（10分）设线性回归模型 $Y = X\beta + e$ 的参数 β 的最小平方估计量为 $\hat{\beta}$，当模型存在完全共线性时，会出现什么情况？根据什么检验模型是否存在完全共线性？