

2000 年南开大学计算方法考研试题

考研加油站收集整理 <http://www.kaoyan.com>



1. 设 A 是 $n \times n$ 阶实矩阵, x 是 n 维向量, 定义
(12分)

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

证明 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

这里 $\lambda_{\max}(A^T A)$ 表示 $A^T A$ 的最大特征值。

2. 用 Gauss-Jordan 消去法求
(12分)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的行列式及逆矩阵。

3. 写出解下列线性方程组的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法的迭代格式, 并判断它们的敛散性。
(16分)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. 写出求 \sqrt{a} 的 Newton 公式, 若以 $x_0 > 0$ 为初始点,
(15分) 证明迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 \sqrt{a} 。

(12分)

5. 确定下面求积公式中的待定系数, 使其代数精度尽量高, 并指出所构造出的求积公式所具有的代数精度:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx A_1 f(-h) + A_2 f(0) + A_3 f(h)$$

(18分)

6. 设 x_j 为互异节点 ($j=0, 1, \dots, n$), $l_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$,

证明:

$$(1). \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad (k=0, 1, \dots, n);$$

$$(2). \sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

(15分)

7. 试在 $[0, 1]$ 上求一个三次样条函数 $S(x)$, 使它满足插值条件:

$$S(0)=0, \quad S\left(\frac{1}{2}\right)=1, \quad S(1)=1, \quad S'(0)=2, \quad S'(1)=1.$$