2000年南开大学空间解析几何与高等代数考研试题

【1】(10分)求直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+2y+2z=0 \end{cases}$$

在平面 $3x+2y+z+1=0$ 上的垂直投影.

【2】(10分)求过点(0, 1, 0)且与两条直线

$$\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+3y+z+1=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

均相交的直线方程.

【3】(10分)设直线L和平面π平行,则直线L上任一点到平面π的距离均相等,称之为直线L到平面π的距离. 求和下面两条直线

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ z-1=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-z+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$$

距离相等的平面方程.

【4】(10分)设 R^2 是实数域R上的2维向量空间,线性变换 $T: R^2 \to R^2$ 在基 $e_1=(1, 0)$, $e_2=(0, 1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

证明: (1)设 W_1 是由 e_1 张成的 R^2 的子空间,则 W_1 是T的不变子空间;

(2) R^2 不能表示成T的任不变自空间 W_2 与 W_1 的直和.

【5】(15分) 设 R^2 是实数域R上2维向量空间,

$$T:\quad R^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (-x_2, x_1)$$

是线性变换.

(1) 求T在基 $\alpha_1=(1, 2)$, $\alpha_2=(1, -1)$ 下的矩阵;

(2) 证明对于每个实数c,线性变换 $T-cE$ 是可逆变换,这里E是 R^2 上恒等变换;

(3)设T在 R^2 的某一基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

证明: 乘积 $a_{12}\, a_{21}$ 不等于零.