2000年南开大学偏微分方程数值解法考研试题

1. 设区域 $\Omega\subset R^n$ 满足锥条件，其边界 $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，$meas(\partial\Omega_1)>0$，$meas(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)=0$，记 (15分)

$$H_0^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega),\ v|_{\partial\Omega_1}=0\}$$

试证：i) $H_0^1(\Omega)$ 为 $H^1(\Omega)$ 的闭子空间；

ii) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中，半范 $|\cdot|_1$ 与范 $\|\cdot\|_1$ 等价.

2. 设 H 为实线性赋范空间，$a(w,v)$ 为 $H\times H$ 上的对称正定双线性泛函，$F(v)$ 为 H 上的线性泛函，记 $J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-F(v)$。考虑以下两个问题： (20分)

(A)：求 $u\in H$ 使 $a(u,v)=F(v)\quad \forall v\in H$；

(B)：求 $\bar{u}\in H$ 使 $J(\bar{u})=\min_{v\in H}J(v)$

试证：问题(A)与问题(B)等价.

3. 设 $\Omega\subset R^2$，满足锥条件，$\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，$meas(\partial\Omega_1)>0$，$meas(\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2)=0$。给定Poisson方程边值问题： (25分)

$$\left.\begin{aligned}&-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega\\&u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_1;\\&\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha(x,y)u=g(x,y),\quad (x,y)\in\partial\Omega_2\end{aligned}\right\}\ (P_1)$$

其中 n 为 $\partial\Omega_2$ 上单位外法向，$f\in L^2(\Omega)$，$g\in L^2(\partial\Omega_2)$，$\alpha\in L^\infty(\partial\Omega_2)$ 且 $\alpha(x,y)\geq 0$；(1) 试写出问题(P_1)之Galerkin变分叙述；

(iii) 证明，(i) 中的变分问题之解存在且唯一.

4. 设 H 为 Hilbert 空间，$V_h \subset H$ 为有限元子空间，$a(w,v): H\times H \to R$，双线性，且 $|a(w,v)| \le M\|w\|_H\|v\|_H$，$a(v,v) \ge \gamma\|v\|_H^2$，$\forall w, v \in H$；$F(v): H \to R$，线性，有界；已知 (20分)

$u \in H$，满足 $a(u,v) = F(v)$，$\forall v \in H$；

$u_h \in V_h$，满足 $a(u_h,v) = F(v)$，$\forall v \in V_h$

试证：(i) $\|u-u_h\|_H \le \frac{M}{\gamma}\|u-\Pi_h u\|_H$，其中 $\Pi_h u$ 为 u 在 V_h 中的插值函数；(ii) 若 $a(w,v)$ 对称，则 (i) 中的估计可改善为

$$\|u-u_h\|_H \le \sqrt{\frac{M}{\gamma}}\|u-\Pi_h u\|_H.$$

5. 给定热传导问题： (20分)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu, \quad 0<x<1,\ 0<t\le T; \\ &u(0,t)=0;\ u(1,t)=0; \\ &u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le 1 \end{aligned}\right\} (P_2)$$

其中 a, b 为常数且 $a>0$.

取时间步长 $\Delta t = \tau$，空间步长 $\Delta x = \frac{1}{N}$，对问题 (P_2) 用显格式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = \frac{a}{h^2}\{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\} - bu_j^k, \quad k=0,1,\cdots,[\tfrac{T}{\tau}]-1,\ j=1,2,\cdots,N-1 \\ &u_0^k = u_N^k = 0; \quad u_j^0 = \varphi_j \end{aligned}\right\}$$

试导出上述差分格式收敛的充分条件。并指出该格式之收敛速度.