2000 年南开大学实变函数考研试题

1. 设 F_1 和 F_2 是实轴上两个闭集，其中一个有界，求证有 $x_1 \in F_1$ 和 $x_2 \in F_2$ 使 $|x_1 - x_2| = \inf\{|y_1 - y_2| : y_1 \in F_1, y_2 \in F_2\}$. 此外举例说明当 F_1 和 F_2 都无界时，本命题不一定成立。 (20)

2. 设 $\{E_k\}_{k\geq 1}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集，满足 $m(E_k) \to 1$ $(k \to \infty)$. (20)
今若 $0 < \lambda < 1$，求证有子列 $\{E_{k_n}\}_{n\geq 1}$ 使 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{k_n}) > \lambda$.

3. 设对任何 $a < \lambda < b$，$f(x)$ 在 $[a, \lambda]$ 上 L 可积，求证为使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，充要条件是极限 $\lim_{\lambda \to b^-} \int_a^\lambda |f(x)| dx$ 存在有限，而且当条件满足时，$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to b^-} \int_a^\lambda f(x)dx$. (20) (20)

4. (i) 叙述 $[a, b]$ 上可测函数与连续函数关系的鲁金定理。
(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，求证对任何 $\varepsilon > 0$，有多项式 $P(x)$，使 $\int_a^b |P(x) - f(x)| dx < \varepsilon$.
(iii) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 L 可积，求证 $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos kx \, dx = 0$.

5. (i) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，求证 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $[a, b]$ 上的绝对连续函数。 (20)
(ii) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 L 可积，求证有零测集 $Z \subset [a, b]$，使对任何实数 α 和 $x \in [a, b] - Z$ 有

$$\frac{d}{dx} \int_a^x |f(t) - \alpha| dt = |f(x) - \alpha|.$$