2000 年南开大学实变函数与泛函分析考研试题

(20分) 1. 试回答下述问题，若肯定，给予证明。若否定，举出反例。

(1) 设 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积，问 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否 Lebesgue 可积？

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积，问 $f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否 Lebesgue 可积？

(15分) 2. 证明：若 $f(x)\geq 0$ 且 $\int_E f(x)dx=0$，则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处为零。

(15分) 3. 试证

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\sin t\,dt \quad , \forall x\in C(0,1)$$

为 $C(0,1)$ 上的线性、有界泛函，并求出其范数。

(20分) 4. 设 X 为线性赋范空间，M 为 X 的子集，证明：

(1) 若 M 为列紧集，则 M 为有界集

(2) 若 M 弱闭，则 M 强闭

(15分) 5. 设 X 为线性赋范空间，M 为闭线性子空间

证明：如果 $\{x_n\}\subset M$，$x_n \xrightarrow{弱} x_0$，则 $x_0\in M$

(15分) 6. 设 $\{x_k\}$ 为 Hilbert 空间 H 中的任一规范正交组，则 $\forall x\in H$，x 关于 $\{x_k\}$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x,x_k\rangle x_k$$

必收敛。