2000年南开大学数理方程考研试题

注意：以下各大题中每小题是独立的，不回答前面的小题也可以回答后面的小题。每题都占总分的20%。

(一) 1. 推导弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 的通解。

2. 证明方程

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

($h>0$, $a>0$ 为常数) 的通解可以表示为

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x},$$

其中 F、G 为任意的二次连续可微函数。

(二) 考虑以下初边值问题：

$$(P)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bu=0, & (0<x<l,\ t>0);\\ u(x,0)=\varphi(x), & (0\le x\le l);\\ u_x(0,t)=g_1(t),\quad u_x(l,t)=g_2(t), & (t\ge 0).\end{cases}$$

1. 引入新的未知函数 $v(x,t)$，将 (P) 化为边界条件是齐次的初边值问题。

2. 如果 $g_1(t)=0$，$g_2(t)=0$，求解问题 (P)。

(问题 (P) 中 $a>0$，$b>0$ 是常数)。

(三) 用能量方法证明以下初边值问题最多只有一个解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\cdot(k\nabla u)+cu=f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\Omega,\ t>0;\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z);\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in\bar{\Omega};\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,y,z,t)+\sigma(x,y,z)u(x,y,z,t)=\mu(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\Gamma,\ t\ge 0\end{cases}$$

其中 $k(x,y,t)\geq k_0>0$；$\sigma(x,y,t)\geq 0$，$c(x,y,t)\geq 0$，Γ 是区域 Ω 的边界，且充分光滑.

(四) 设 Ω 是平面上的有界区域，其边界 Γ 充分光滑. 考虑方程

$$-\Delta u + cu = 0, \quad (x,y)\in\Omega.$$

其中常数 $c>0$，Δ 是 Laplace 算子.

1. 证明：如果 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 是方程的解，那么，$u(x,y)$ 不能在 Ω 内部取正的最大值，也不能在 Ω 内部取负的最小值.

2. 证明：上述方程的第一边值问题最多只有一个解.

3. 如果 $c<0$，上述两个命题是否成立？为什么？

(五) 考虑以下边值问题：

$$(p)\begin{cases} -\Delta u = 0, & (x>0,\ y>0); \\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,y)=\psi(y), & (x,y\geq 0) \end{cases}$$

且 $\varphi(0)=\psi(0)$.

1. 写出区域 $\Omega=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ 求解 Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数.

2. 推导 (p) 的解（不必证明）.