2000年南开大学数理统计考研试题

一、填空题（本题共10小题，20个空，满分40分）

1．设$X_1,\cdots,X_n$独立同正态分布，数学期望为0，样本均值$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，修正样本方差$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则统计量$\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S}$服从______分布，参数为______。

2．设$X_1,\cdots,X_{10}$是来自正态总体$N(0,0.3^2)$的简单随机样本，则$P\left\{\sum_{i=1}^{10}X_i^2>1.44\right\}=$____________。

3．假设$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，$S_1^2=\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X})^2$是由来自$X$的简单随机样本计算的修正样本方差，$S_2^2=\frac{1}{8-1}\sum_{i=1}^{8}(Y_i-\overline{Y})^2$是由来自$Y$的简单随机样本计算的修正样本方差，且满足$P\left\{c_1<\frac{S_1^2}{S_2^2}<c_2\right\}=0.90$，则$c_1=$____________，$c_2=$____________。

4．对一批产品的不合格率p提出如下假设$H_0: p\leq 2\%$，则买方风险是第______类错误的概率；卖方风险是第______类错误的概率。

5．假设总体X服从参数为λ的泊松（Poisson）分布，$X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则$X_1,\cdots,X_n$的联合概率分布为

____________________。

6．在一批产品的容量为100的样本中，经检验发现16个次品，则这批产品次品率的95%的置信区间为（____________，____________）。

7．假设$X_1,\cdots,X_{16}$是来自正态总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=2.705$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=0.00084$，则$\mu$的95% 的置信区间为（____________，____________）。

8．假设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,4)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是修正样本方差，$H_0:\mu\geq 3$，则检验的统计量为____________，水平 $\alpha=0.01$ 的否定域为____________。

9．假设 $X_1,\cdots,X_{21}$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，S^2 是修正样本方差，$H_0:\sigma^2\geq 15$，则检验的统计量为____________，水平 $\alpha=0.05$ 的否定域为____________。

10．假设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。自 X,Y 分别抽取容量为 $n_1=6$ 和 $n_2=7$ 的简单随机样本，样本均值分别是 $\overline{X}=33$，$\overline{Y}=30$ 修正样本方差分别是 $S_1^2=3.2$，$S_2^2=4.0$。则检验假设 $H_0:\mu_1\leq\mu_2$ 使用的统计量为____________，其值为____________，水平 $\alpha=0.10$ 的否定域为____________，结论为____________。

二、计算题（本题共6小题，满分60分）

1．假设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\theta,\theta^2)$ 的一个简单随机样本，求θ的最大似然估计$(\theta>0)$。

2．假设总体 X 服从 0－1 分布，参数 p 未知，$0<p<1$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，求 p^2 的无偏估计。

3．假设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}(\lambda+1)x^{\lambda}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求λ的矩估计量。

4．假设总体 X 服从 0－1 分布，参数 p 未知，$0<p<1$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$n>30$。利用中心极限定理证明，p 的置信水平为0.95的置信区间为（$\hat{p}_1,\hat{p}_2$），其中 $\hat{p}_1$、$\hat{p}_2$ 是下列一元二次方程

$$(n+1.96^2)p^2-(2n\overline{X}+1.96^2)p+n\overline{X}^2=0$$

的两个不同实根。

5. 将一颗骰子掷 120 次，得如下结果：

出现点数	1	2	3	4	5	6
出现频数	23	26	21	20	15	15

检验这颗骰子是否均匀对称 ($\alpha=0.05$)。

6. 假设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$，关于参数 μ 有两个二者必居其一的假设：

$$H_0:\mu=0\quad,\quad H_1:\mu=1$$

假设 H_0 的否定域取为

$$V=\{|\overline{X}|\le c\}$$

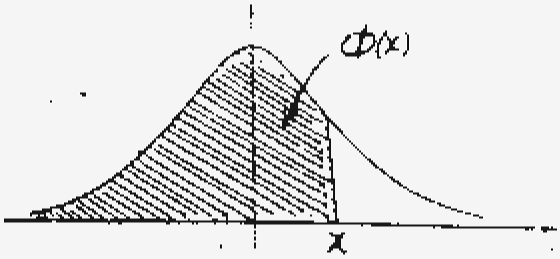
其中 $\overline{X}$ 为来自总体 X 的样本均值，样本容量 $n=25$。

(1) 对 $\alpha=0.05$，求 c。

(2) 计算以 V 为否定域的检验的第二类错误概率 β。

附表 1　标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 值表

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

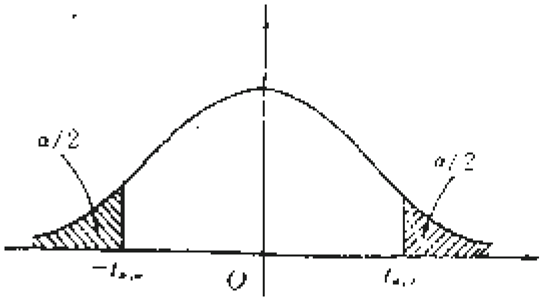


x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
3	6179	6217	6255	6293	6631	6368	6406	6443	6480	6517
4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8079	8106	8133
9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9786	9693	9699	9706
9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9886
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

$\Phi(4.0)=0.999968329$　　$\Phi(5.0)=0.9999997134$　　$\Phi(6.0)=0.9999999990$

附表 6　t 分布双侧分位数 $t_{\alpha,\nu}$ 表

（ν—— 自由度）



ν \ α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	22.33	31.60
3	64	35	3.18	4.54	5.84	7.45	10.21	12.92
4	53	13	2.78	3.75	4.60	5.60	7.17	8.61
5	48	02	57	36	03	4.77	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.21	5.96
7	41	89	36	00	50	03	4.79	41
8	40	86	31	2.90	36	3.83	50	04
9	38	83	26	82	25	69	30	4.78
10	37	81	23	76	17	58	14	59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.02	4.44
12	36	78	18	68	05	43	3.93	32
13	35	77	16	65	01	37	85	22
14	35	76	14	62	2.98	33	79	14
15	34	75	13	60	95	29	73	07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	3.69	4.02
17	33	74	11	57	90	22	65	3.97
18	33	73	10	55	88	20	61	92
19	33	73	09	54	86	17	58	88
20	33	72	09	53	85	15	55	85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.53	3.82
22	32	72	07	51	82	12	51	79
23	32	71	07	50	81	10	49	77
24	32	71	06	49	80	09	47	75
25	32	71	06	49	79	08	45	73
26	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.44	3.71
27	31	70	05	47	477	06	42	69
28	31	70	05	47	76	05	41	67
29	31	70	05	46	76	04	40	66
30	31	70	04	46	75	03	39	65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.31	3.55
60	30	67	00	39	66	91	23	46
80	29	66	1.99	37	64	89	20	42
100	29	66	98	36	63	87	17	39
200	29	65	97	35	60	84	13	34
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

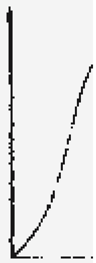
附表 7　F 分布上侧分位数 $F_\alpha(f_1,f_2)$ 表

(f_k——第 k 自由度,$k=1,2$)

$\alpha=0.05$

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.39	19.40	19.4
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.7
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.8
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.6
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.9
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.5
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.2
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.0
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.8
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.6
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.4
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.3
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.2
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.2
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.0
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	1.9
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.8
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.7
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.6

附表 5　χ^2 分布上侧分位数($\chi^2_{\alpha,\nu}$)表(1≤



(当 $\nu\geqslant45$ 时,可使用近似公式:

$$\chi^2_{\alpha,\nu}\approx\begin{cases}\frac{1}{2}(\sqrt{2\nu-1}+u_{2\alpha})^2, & \alpha\leqslant0.5;\\ \frac{1}{2}(\sqrt{2\nu-1}+u_{2(1-\alpha)})^2, & \alpha\geqslant0.5;\end{cases}$$

其中 u_α 是 $N(0,1)$的双侧分位数)

ν \ α	0.995	0.990	0.975	0.95	0.90	0.70	0.50	0.30	0.10	0.05
1	4×10^{-5}	2×10^{-4}	0.001	0.004	0.016	0.148	0.455	1.074	2.706	3.841
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.713	1.386	2.408	4.605	5.991