2000年南开大学数学分析考研试题

1. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)Sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 证明$f(x,y)$在点（0，0）处连续但不可微。

（20分）

2. 设$f(u)$具有连续的导函数，且$\lim\limits_{u\to+\infty} f'(u)=A>0$，$D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\le R^2,\ x,\ y\ge 0\}(R>0)$

(1) 证明：$\lim\limits_{u\to+\infty} f(u)=+\infty$；

(2) 求$I_R=\iint\limits_D f'(x^2+y^2)dxdy$；

(3) 求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{I_R}{R^2}$。 （25分）

3. (1) 叙述$f(x)$于区间I一致连续的定义；

(2) 设$f(x)$, $g(x)$都于区间I一致连续且有界，证明$F(x)=f(x)g(x)$也于I一致连续。

（15分）

4. 设函数列$\{f_n(x)\}$于区间I一致收敛于$f(x)$，且存在数列$\{a_n\}$使得当$x\in I$时，总有$|f_n(x)|\le a_n$，证明 $f(x)$于I有界。 （10分）

5. 设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，证明

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2) 如果$\lambda>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛，问$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是否必收敛？说明理由。 （15分）

6. 设$f(x,t)$于$[a,+\infty;c,d]$连续，$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$ 于$[c,d)$一致收敛，证明 $\int_a^{+\infty} f(x,d)dx$收敛。

（15分）