2000年南开大学拓扑学考研试题

以下六道题共100分

(一)(18分) 设(X,ρ), (Y,ρ')为度量空间, $f: X\to Y$为一致连续的映射, 证明: 对X的子集A, B使$\rho(A,B)=0$, 总有$\rho'(f(A),f(B))=0$.

(二)(18分) 设$f: X\to Y$为拓扑空间X到Y的连续映射, $X\times Y$为乘积空间, $\Gamma_f=\{(x,y)\in X\times Y \mid y=f(x)\}$叫做$f$的图象。证明: 若$Y$为Hausdorff空间, 则$\Gamma_f$为$X\times Y$闭子集.

(三)(18分) 空间X叫做局部连通的, 如果X的每点x的任一开邻域U, 存在x的连通邻域V(即V是连通子集且x为V的内点), 使$V\subset U$. 证明: 若X局部连通, 则X的每个开集的连通分支是X的开集.

(四)(18分) 满连续映射$f: X\to Y$叫做完备的, 如果f是闭映射, 且对任意点$y\in Y$, $f^{-1}(y)$是X的紧子集。证明: 若$f: X\to Y$是完备的, 而Y紧致, 则X紧致。

(五)(18分) 设 $E^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i$实数$,\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le 1\}$，$S^{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid \sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\}$ 为 E^n 的边界。证明：商空间 E^n/S^{n-1} 同胚于 $S^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\mid \sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\}$。

(六)(10分) 描述下列各连续映射 $f: S^1\to S^1$ 所导出的基本群的同态：$f_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,f(1))$

(a) 对径映射 $f(e^{i\theta})=e^{i(\theta+\pi)}$，$0\le\theta\le 2\pi$

(b) $f(e^{i\theta})=e^{in\theta}$，$0\le\theta\le 2\pi$，$n$ 整数，

其中单位圆周 $S^1=\{e^{i\theta}\in C\mid 0\le\theta\le 2\pi\}$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$；$i=\sqrt{-1}$。