2000年南开大学信号与系统考研试题

信号与系统试题

一. (10 分) 写出广义极限 $\lim_{\lambda\to\beta} g_\lambda(t)=\delta(t)$ 的定义，并证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\sin 2\pi\lambda t}{\pi t}\right]^2=\delta(t)$$

二. (30 分) 分别叙述下列特殊信号的频谱：

1. $x(t)=\delta^{(4)}(t)$, 即, $\delta(t)$ 的四阶广义导数.
2. 单位阶跃信号 $u(t)$.
3. 半余弦波 $x(t)=\begin{cases}\cos\frac{\pi t}{2\delta} & |t|<\delta \quad (\delta>0)\\ 0 & |t|>\delta \quad (\delta>0)\end{cases}$
4. 钟形余弦波 $x(t)=e^{-\beta^2t^2}\cos 2\pi f_0 t \quad (\beta>0)$
5.
$$x(t)=\begin{cases}t^3e^{-\alpha t} & t>0 \quad (\alpha>0)\\ 0 & t<0 \quad (\alpha>0)\end{cases}$$
6. 斜坡信号
$$x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$

三. (15 分) 设模拟信号 $x(t)$ 的频谱为理想低通滤波

$$X(f)=\begin{cases}1 & |f|<f_1\\ 0 & |f|>f_1\end{cases}$$

取 $\Delta=\frac{1}{2f_1}$，求离散信号 $x(n\Delta)$ 以及它的频谱 $X_\Delta(f)$，并对在区间 $[-\frac{1}{2\Delta},\frac{1}{2\Delta}]$ 上的平均误差：

$$\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}}|X(f)-X_\Delta(f)|df$$

作出估计.

四．(15 分) 设 $X_0, X_1, \cdots, X_{N-1}$ 是 N 个观测数据，令

$$\hat{X}_k = DFT(X_m) = \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{-km\frac{2\pi}{N}} \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

为子样 $X_0, \cdots, X_{n-1}$ 的离散频谱，证明：

1. $X_0, \cdots, X_{N-1}$ 是实信号的充分必要条件是 $\hat{X}_{N-m} = \overline{\hat{X}_m}, m = 0, 1, \cdots, N$.

2. 对于任意自然数 P，令

$$\hat{Y}_n = \begin{cases} P\hat{X}_k & n = 0, \cdots, N/2-1, \\ 0 & n = N/2, \cdots, (P-1/2)N-1, \\ P\hat{X}_{n-(P-1)N} & n = (P-1/2)N, \cdots, PN-1 \end{cases}$$

则

$$Y_l = IDFT(\hat{Y}_n) = \frac{1}{PN}\sum_{n=0}^{PN-1} \hat{Y}_n e^{nl\frac{2\pi}{PN}}, l = 0, 1, \cdots, PN-1$$

满足 $Y_{Pk} = X_k, k = 0, 1, \cdots, N-1$.

五．(10 分) 设 $x(n), y(n)$ 是两个序列，证明下列等式：

1. 以 $Z(\cdot)$ 表示 z- 变换，那么 $Z(x(n) * y(n)) = Z(x(n))Z(y(n))$.

2. $DFT(x(n) \circledast y(n)) = DFT(x(n))DFT(y(n))$.

六．(10 分) 绘制下列原理的方框图：

1. 快速卷积原理.

2. 快速相关原理.

七．(10 分) 叙述重叠相加法方式的分段快速卷积的原理，并给出分段相加法直观的图形解释.