download.kaoyan.com

南开大学2008年硕士研究生入学考试试题

学　　院：011 陈省身数学研究所、012 数学科学学院、060 生命科学学院
考试科目：802 高等代数
专　　业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、生物信息学

注意：请将答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、计算题（每题12分，共60分. 请写出必要的计算步骤）

1. 设n阶实矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$满足条件

(1) $a_{ii}>0,\quad i=1,2,\cdots,n,$

(2) $a_{ij}<0,\quad i\neq j,$

(3) $\sum_{i=1}^{n}a_{ik}=0,\quad k=1,2,\cdots,n.$

试求A的秩$r(A)$.

2. 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为数域$\mathbb{P}$上的n阶方阵. 定义$\mathbb{P}^{n\times n}$上的线性变换T使$T(X)=AX,\quad X\in\mathbb{P}^{n\times n}$. 试求$T$的迹和行列式.

3. 设$\mathbb{P}$为数域，$c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\in\mathbb{P}$. 令

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

试求A的最小多项式.

4. 设V为数域$\mathbb{P}$上的3维线性空间. 已知V上线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

试求V的一组基使得T在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

download.kaoyan.com

5. 设n 阶实矩阵P 满足$P' = P^2$. 试求出P 的所有可能的特征值.

二、 设$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为n 阶方阵, 且$r(A_1A_2\cdots A_m) = r(A_m)$. 证明: 对任何$1 \le j, k \le m$, 齐次线性方程组$A_jA_{j+1}\cdots A_mX = 0$ 与$A_kA_{k+1}\cdots A_mX = 0$ 同解. (本题20 分)

三、 设S, T 都是半正定实对称n 阶方阵. 证明: $\det(S+T) \ge \frac{\det S + \det T}{2}$. (本题20 分)

四、 设$A, A - I_n$ 都是n 阶实对称正定矩阵. 证明: $I_n - A^{-1}$ 也是正定矩阵. (本题15 分)

五、设$f(x, y)$ 为线性空间V 上的非退化双线性函数. 证明: 对于任何$g \in V^*$, 存在唯一的$\alpha \in V$, 使得$g(\beta) = f(\alpha, \beta), \forall \beta \in V$. (本题15 分)

六、 设T 为欧几里得空间V 上的线性变换, 满足条件

$$\forall x, y \in V,\ (Tx, y) = -(x, Ty) \text{ 或 } (Tx, y) = (x, Ty) \text{ 至少有一个成立.}$$

证明: T 或为对称变换或为反对称变换. (本题10 分)

七、 设A, B 为n 阶复方阵, $C = AB - BA$. 证明: 如果C 与A 可交换, 则C 为幂零矩阵. (本题10 分)