南开大学 2009 年硕士研究生入学考试试题

学　　院：011 陈省身数学研究所、012 数学科学学院

考试科目：702 数学分析

专　　业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、计算 $\iint_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，$D$ 由 $y=x, y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成. （15 分）

二、计算 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\dfrac{dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. （15 分）

三、计算 $\int_l ydx+zdy+xdz$，l 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$，$x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$

从点 $(a,0,0)$ 到 $(0,0,c)$ 的部分，其中 a,b,c 为正的常数. （20 分）

四、求 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数. （15 分）

五、求 $f(t)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan tx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ 的表达式. （20 分）

六、设 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 单调下降，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$. （15 分）

七、已知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶导数，$f(0)=f'(0)=0$，$|f''(x)|^2\le|f(x)\cdot f'(x)|$，

证明：存在 $\delta>0$，使在 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$. （15 分）

八、设 $f(x,y)$ 在 P_0 的邻域 $U(P_0)$ 内存在连续的三阶偏导数，并且所有三阶偏导数的绝对值

不超过常数 M，P_1 与 P_2 关于 P_0 对称，并且 $P_1,P_2\in U(P_0)$，P_1 与 P_0 的距离为 l，$\vec{l}$ 为

由 P_0 指向 P_1 的方向，试证：$\left|\dfrac{f(P_1)-f(P_2)}{2l}-\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial\vec{l}}\right|\le\dfrac{\sqrt{2}}{3}Ml^2$. （20 分）

九、证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=a$，$u_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=a$. 利用这一结论，分析达朗贝尔判别

法与柯西判别法二者在判别正项级数的敛散性时的关系，可以获得怎样的经验？（15 分）