南开大学 2009 年硕士研究生入学考试试题

学　　院：011 陈省身数学研究所、012 数学科学学院
考试科目：802 高等代数
专　　业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、　设线性变换$\mathcal{A}$ 在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\3&0&-1&2\\2&5&3&1\\1&2&1&3\end{pmatrix}.$$

试求$\mathcal{A}$ 在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 下的矩阵. (本题20 分)

二、　设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&-1&1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}.$$

在$\mathrm{P}^{4\times1}$ 上定义线性变换$\mathcal{A}$ 使$\mathcal{A}(X)=AX$, $X\in\mathrm{P}^{4\times1}$. 试求$\mathcal{A}$ 的像$\mathrm{im}(\mathcal{A})$ 及核$\ker(\mathcal{A})$ 的维数与一组基. (本题20 分)

三、　试决定当实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 取何值时, n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_2x_2)^2+(x_2+a_3x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_nx_n)^2+(x_n+a_1x_1)^2$$

是正定的? (本题20 分)

四、　设$\alpha\in\mathrm{R}^{n\times1}$, 且在$\mathrm{R}^{n\times1}$ 上的标准度量下α 为单位向量. 证明: 必存在一个n 阶实对称正交矩阵A 使得α 为A 的第一列. (本题20 分)

五、　设V 为数域P 上的n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 为V 上的线性变换且$\mathcal{A}$ 的秩$r(\mathcal{A})=1$. 证明: 如果$\mathcal{A}$ 不可对角化, 则必是幂零的. (本题15 分)

六、　设A, B 为n 阶复方阵, 证明: $AB+A$ 与$BA+A$ 有相同的特征值而且每个特征值的重数都相同. (本题15 分)

七、 设A, B 是n 阶 (实) 正交矩阵, 且$\det(A+B)=\det A-\det B$. 证明: $\det A=\det B$. (本题15 分)

八、 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 为数域$\mathbf{P}$ 上的n 阶方阵, 满足条件$b_{ij}=b^{i-j}a_{ij}$, 其中b 为一个非零常数. 作线性方程组(I): $AX=C$ 及(II): $BX=D$. 试证明方程组(I) 对任何$C\in\mathbf{P}^{n\times 1}$ 有解当且仅当方程组(II) 对任何$D\in\mathbf{P}^{n\times 1}$ 有解. (本题15 分)

九、 设$\mathbf{P}$ 为数域, T 为$\mathbf{P}^{n\times n}$ 上的线性变换, 满足条件: 对任何固定的$A,B\in\mathbf{P}^{n\times n}$, $T(AB)=T(A)T(B)$ 或$T(AB)=T(B)T(A)$ 至少有一个成立. 证明: 要么对所有的$A,B\in\mathbf{P}^{n\times n}$, $T(AB)=T(A)T(B)$, 要么对所有的$A,B\in\mathbf{P}^{n\times n}$, $T(AB)=T(B)T(A)$. (本题10 分)