

南开大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

学 院：012 数学科学学院、011 陈省身数学研究所

考试科目：702 数学分析

专 业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} [(x - \frac{1}{2})^2 - x^4 \ln^2(1 + \frac{1}{x})]$. (15 分)

二、计算积分 $I = \iint_S (x + z) dS$,

其中 S 是曲面 $x^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截取的有限部分. (20 分)

三、计算积分 $I = \iiint_D xyz dx dy dz$,

其中 D 位于第一象限且由曲面 $z = p(x^2 + y^2)$, $z = q(x^2 + y^2)$, $xy = a$, $xy = b$,

$y = \alpha x$, $y = \beta x$ 所围, 这里 $0 < p < q$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$. (20 分)

四、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$ 的和. (15 分)

五、讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\rho + \frac{1}{\ln n}}}$, 它是绝对收敛、条件收敛还是发散的? (15 分)

六、证明并讨论如下问题: (20 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且对任意 $x \in [a, b]$, 都有 $f(x) \in [a, b]$.

证明: 存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = c$.

2. 是否存在 \mathbb{R} 上的连续函数 $f(x)$, 使得 $f(x)$ 在有理点上取值为无理数, 在无理点上取值为有理数? 为什么?

七、设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 存在二阶导数, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$.

证明: 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $f''(c) \geq 18$. (15 分)

八、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 存在连续的二阶导数, 且满足 $|\int_a^b f(x) dx| < \int_a^b |f(x)| dx$.

记 $M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$, 证明:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M_1}{2} (b-a)^2 + \frac{M_2}{3} (b-a)^3. \quad (15 \text{ 分})$$

九、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, 证明:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} f(x) dx \right) = A. \quad (15 \text{ 分})$$