

南开大学 2010 年硕士研究生入学考试试题

学 院：012 数学科学学院、011 陈省身数学研究所

考试科目：802 高等代数

专 业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、计算下列行列式的值：(本题20 分)

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

二、试求解矩阵方程：(本题20 分)

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

三、 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

试求 A^n . (本题20 分)

四、 设 A 为 n 阶实方阵, 已知 A 的特征值全为实数, 且 $AA' = A'A$. 证明: A 必为对称矩阵. (本题20 分)

五、 设 A 为实正定对称矩阵, 证明: A 中元素之最大者必位于 A 的对角线上. (本题15 分)

六、 证明: 如果一个球面的球心坐标 (x_0, y_0, z_0) 中至少有一个是无理数, 则此球面上任何四个不在同一平面上的点中至多有三个点使其坐标都是有理数. (本题15分)

七、 设 A, B 为 n 阶复方阵, 且 A 可逆, B 幂零, 且 $AB = BA$. 证明: $A + B$ 为可逆矩阵. (本题15分)

八、 设 A 为 n 阶实反对称矩. 证明:

1. $\det A \geq 0$.
2. 如果 A 中元素全为整数, 则 $\det A$ 必为某个整数的平方. (本题15分)

九、 设 V 为 n 维复线性空间, $\text{End } V$ 为 V 上所有线性变换构成的线性空间, 又 A, B 为 $\text{End } V$ 的子空间, 且 $A \subseteq B$. 令

$$M = \{x \in \text{End } V \mid xy - yx \in A, \forall y \in B\}.$$

假定 $x_0 \in M$ 满足条件 $\text{tr}(x_0 y) = 0, \forall y \in M$. 证明: x_0 必为幂零线性变换. (本题10分)