南开大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

学　　院：010 组合数学研究中心、011 陈省身数学研究所、012 数学科学学院
考试科目：802 高等代数
专　　业：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、★生物信息学

注意：请将所有答案写在专用答题纸上，答在此试题上无效！

一、（20 分）设 A 为秩为 1 的 n 阶复方阵，A 的迹 $tr(A)=a\neq 0$，试求出 A 的所有特征值（写出重数）。

二、（20 分）设 V 为 4 维实线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为一组基，已知 V 上线性变换 T 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\0&1&2&2\\0&-1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

（1）试求出 T 的特征值与特征向量。

（2）试分别求出 T 的核 $\ker T$ 与象 $im\,T$ 的一组基与维数。

三、（20 分）设实矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，试将 A 写成一个正交矩阵 Q 与一个上三角矩阵 T 的乘积。

四、（20 分）设 A 为实反对称矩阵，证明：$E-A^{10}$ 一定是正定矩阵。

五、（15 分）设 V 为一个欧氏空间，T 为 V 到 V 的一个映射，满足条件：$|T\alpha|=|\alpha|$，$\forall\alpha\in V$，试问 T 是否一定是 V 上的正交变换？说明理由。

六、（15 分）设 A,B 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵，满足方程 $aA^2+bAB+cB=0$，其中 a,b,c 为非零常数，证明：$(cE+bA)$ 为可逆矩阵。

七、（15 分）设 A,B 为数域 $\mathbb{P}$ 上的 n 阶方阵，且 $r(A)=r(BA)$，证明：对任何自然数 l，有 $r(A^l)=r(BA^l)$.

八、（15 分）设 V 为复数域上的 $4n$ 维线性空间，证明：存在 V 上的线性变换 T 使得 $T^{-1}=-id$，

其中 id 为恒等变换。证明满足上述条件的线性变换必然在某组基下的矩阵为对角矩阵。

九、（10 分）数域 $\mathbb{P}$ 上一个 n 阶方阵 A 称为幂零的，如果存在自然数 m 使得 $A^m=0$．设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一个幂零方阵，且 $a_{12}\neq 0$, $a_{13}=0$, $a_{22}=0$, $a_{23}\neq 0$．证明：不存在矩阵 B 使得 $B^{n-1}=A$．