装备指挥技术学院二〇〇九年硕士研究生入学考试

高等数学（702）试题

（注意：答案必须写在答题纸上，本试卷满分 150 分）

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，每小题给出的四个选择中，只有一项符合题目要求）

（1）若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 a 的值为

A 、 2；　B、-2；　C、4；　D、-4

（2）设有两个命题：已知 $f(x)$， $g(x)$ 在 x_0 点都不连续，

甲：$f(x)+g(x)$ 在 x_0 点必不连续；

乙：$f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点必不连续.

下列结论正确的是

A、甲、乙都正确；　B、甲不正确，乙正确；

C、甲正确，乙不正确；　D、甲、乙都不正确.

（3）设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 x^k 中 k 等于

A 、 1；　B、2；　C、3；　D、4 .

（4）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}]$ 的值为

A 、0；　B、$\dfrac{\pi}{3}$；　C、$\dfrac{1}{3}$；　D、$\dfrac{\pi}{4}$.

（5）设 $f(x)$ 在[0，1]上满足 $f'''(x)>0, f''(0)=0,$ 则下述不等式正确的是

A、　$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

B、　$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；

C、　$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；

D、　$f'(0)>f(0)-f(1)>f'(1)$.

（6）设 $z=(1+x)^{x+y}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$

A、 1+ln2；　　B、 4(1+ln2)；
C、 4；　　D、 8.

（7）微分方程 $y''-2y'=xe^{2x}$ 的特解形式可设为

A、 $(ax+b)e^{2x}$；　　B、 $(ax+b)x$；(B)
C、 $(ax+b)xe^{2x}$；　　D、 axe^{2x}.

（8）已知 $D:0\le y\le x^2, 0\le x\le 1$，则二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$ 的值为

A 、 $\dfrac{1}{6}$；　B、 $\dfrac{1}{2}$；　C、 $\dfrac{1}{4}$；　D、 $\dfrac{1}{12}$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

（9） $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}\,x=$________；

（10）设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)-2x=\int_0^2 f(t)dt$，则 $f(x)=$________；

（11）设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$，则其在 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 的法方程为________；

（12） $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在 x_0 可导的________条件；

（13）改变二次积分的次序： $\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=$________；

（14）设 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，则 $y^{(n)}=$________；

三、解答题（本题共 8 小题，满分 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

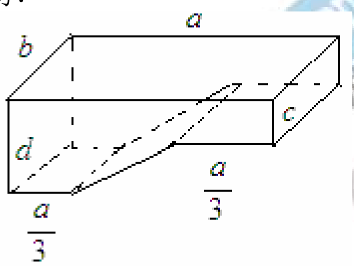
（15）（本题满分 12 分，每小题 6 分）求下列极限

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{15}{16}\cdots\dfrac{n^2-1}{n^2}$，　(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

（16）（本题满分 12 分）求积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x\cdot\sqrt{2x^8-2x^4+1}}$.

（17）（本题满分 11 分）设 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \\ y=t^2 \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（18）（本题满分 12 分）一水池长为 a 米，浅水部分深为 c 米，长为 $\dfrac{a}{3}$ 米，深水部分深为 d 米，长为 $\dfrac{a}{3}$ 米，宽为 b 米，深水浅水之间由倾斜平面过渡，如下图所示，如将蓄满的池水抽空，需做多少功？



（19）（本题满分 12 分）设 $z=u(x,y)e^{ax+y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试证：当 $a=1$ 时有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

（20）（本题满分 12 分）计算积分

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy+\int_{0}^{2}dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dy$$

（21）（本题满分 12 分）求 $2y''+y'-y=12xe^{-x}$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{1}{3}$ 的解.

（22）（本题满分 11 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足

$$e^{-1}f(1)=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx$$

证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=f(\xi)$.