# 北方工业大学

# 2004 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数
适用专业：应用数学专业
说　　明：

（答题请写在答题纸上，试题上答题无效）

## 一、填空题 (每空 3 分，共 36 分)

1、设 $Q(\sqrt{3}i)=\{a+b\sqrt{3}i \mid a,b$为任意有理数$\}$，则$Q(\sqrt{3}\,i)$是数域. 答：（ ）

A、对　　　　B、错

2、若在线性空间 $P^3$ 中定义变换 $\mathbf{A}$ 为 $\mathbf{A}(a_1,a_2,a_3)=(a_1^2,a_2+a_3,a_3)$，则 $\mathbf{A}$ 是线性变换. 答：（ ）

A、对　　　　B、错

3、判断下列两式是否是 6 级行列式中的项？若是，应带有什么符号？

1）$a_{23}a_{31}a_{42}a_{65}a_{34}a_{56}$ ______；2）$a_{32}a_{14}a_{43}a_{21}a_{66}a_{55}$ ______.

4、设 4 阶矩阵 $A$ 的行列式为 $|A|=3$，则：1）$|2A|=$____，2）$|A^*|=$____.

5、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$____.

6、若线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 $\lambda$ 满足____________.

7、设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，并且被向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，则 $r$ 与 $s$ 的大小关系为

________.

8、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+t\,x_2x_3$ 是正定的，则 t 的范围是_____.

9、复数域 C 上的所有 n 阶矩阵的集合为 $M_n(C)$，对矩阵的加法和数与矩阵的乘法，$M_n(C)$ 构成实数域上的向量空间，$M_n(C)$ 的维数是_____.

10、n 阶方阵 A 可以对角化的充分必要条件是 A 的不同特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots,s)$ 所对应的特征子空间 $V_{\lambda_i}$ 满足________.

77

# 北方工业大学

# 2004 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数
适用专业：应用数学专业
说　　明：

（答题请写在答题纸上，试题上答题无效）

## 二、计算题 (共 90 分)

1、(15 分) 试用辗转相除法求 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 和 $g(x)=x^4+x^3+3x^2+x+2$ 的最大公因式，以及公共根；并将 $(f(x),g(x))$ 表示成 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的组合.

2、(10 分) 计算下列行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$, 其中 $x_1,\cdots,x_n\neq 0$.

3、(15 分) 设实二次型为

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3-4x_2x_4+4x_3x_4,$$

求出一个正交线性替换及其所化成的标准型.

4、(15 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似，

1) 求 x 与 y 的值；

2) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

5、(15 分) 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

的不变因子、初等因子、若当标准形和最小多项式.

78

# 北方工业大学

# 2004年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：应用数学专业

说　　明：

（答题请写在答题纸上，试题上答题无效）

6、(10 分) 设三维线性空间 V 上的线性变换 A 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

求 A 在基 $2\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

7、(10 分) 设欧氏空间 $R^3$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

求基 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_2-\alpha_3$ 的度量矩阵.

三、证明题（每题 12 分，共 24 分）

1、试证：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，那么 $\beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，并且表示法是唯一的.

2、设 $(f(x),g(x))=1$，A 为 n 阶方阵，试证：$f(A)\cdot g(x)X=0$ 的解空间 V 是 $f(A)X=0$ 与 $g(x)X=0$ 的解空间 $W_1$ 与 $W_2$ 的直和.

79