北方工业大学

2005 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：应用数学专业

说　　明：答题时间为 **3** 小时，满分 **150** 分

（答题（包括填空题答案）请写在答题纸上，试题上答题无效）

一、　填空题（每空 3 分，共 30 分）

1、包含$3i$的最小数域是______________.

2、以 1 为二重根，i 为单根的最低次实系数多项式是______________.

3、矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$中元素 5 的代数余子式是___________.

4、设 n 阶方阵 A 的行列式为$|A|=a$，则：1）$|-A|=$_____，2）$|A^*|=$_____.

5、设矩阵 $X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$，其中 A^{-1}和 B^{-1}存在，则 X^{-1}为________.

6、设 $AX=0$ 为 n 元齐次线性方程组，秩$(A)=r$，则其基础解系含向量的个数是_________.

7、设线性变换 D 为求导运算，则 D 在基 e^{-x},e^{x},xe^{x} 下的矩阵为_________.

8、设 3 级 λ 矩阵的初等因子为 λ，λ，$\lambda-1$，$(\lambda-1)^2$，则其标准形为_________.

9、3 阶方阵 A 的特征值为 1，－1，2，则 $B=2A^3-3A^2$ 的特征值为_________.

二、**计算题**（共 90 分）

1、（10 分）设 $f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$，试求：

1）$f(x)$的全部有理根及其在有理数域上的因式分解；

2）在复数域上 $f(x)$ 的其余根及 $f(x)$ 的因式分解.

2、（10 分）计算下列行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

北方工业大学

2005 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数
适用专业：应用数学专业
说　　明：答题时间为 3 小时，满分 150 分

（答题（包括填空题答案）请写在答题纸上，试题上答题无效）

3、(15 分) 设 $W_1 = L(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2 = L(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1 = (1,0,1,1), \alpha_2 = (0,1,1,1), \quad \beta_1 = (0,0,1,1), \beta_2 = (1,1,1,3),$$

求 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$.

4、(15 分) 设线性变换 A 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix},$$

1) 求 A 在基 $\varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$，$\varepsilon_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$，$\varepsilon_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ 下的矩阵；

2) 设 $\alpha = e_1 + 6e_2 - e_3$，$\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3$，求 $A\alpha$ 和 $A\beta$ 在基 e_1,e_2,e_3 下的坐标。

5、(15 分) 求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型，并求变换矩阵 P.

6、(10 分) 下列 λ-矩阵的不变因子和初等因子

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3) \end{bmatrix}.$$

7、(15 分) 设实二次型为

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

求正交线性替换将该二次型化成标准型，写出所求出的正交线性替换和标准型.

北方工业大学

2005 年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：应用数学专业

说 明：答题时间为 3 小时，满分 150 分

（答题（包括填空题答案）请写在答题纸上，试题上答题无效）

三、证明题（每题 10 分，共 30 分）

1、设 A 是线性空间 V 上的线性变换, 若 $A^{k-1}\xi \neq 0$, $A^k\xi=0$, 则 ξ，$A\xi$，…，$A^{k-1}\xi$ $(k>0)$ 线性无关.

2、设 A 是 n 阶实对称矩阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$．证明：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 在 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=1$ 下的最大值恰好等于 A 的最大特征值.

3、若 A,B 均为 n 阶实对称矩阵且 B 正定；则存在实可逆矩阵 P，使 $P'AP$ 和 $P'BP$ 都是对角形.