中国科学院软件所

一九九九年招收硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：离散数学

一、（8分）求与公式$(x_2 \vee \neg x_1) \to x_3$ 逻辑等值的主合取范式和主析取范式。

二、（8分）判断下列各公式是：①永真式；②永假式；③其它。

(1) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

(2) $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee (p \vee q))$

(3) $(\neg p \vee q) \wedge \neg(q \vee \neg r) \wedge \neg(r \vee \neg p \vee \neg q)$

(4) $\neg(q \wedge p) \to (p \vee q)$

三、（9分）问$\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$是否谓词演算的有效式？证明你的结论。

四、（9分）将下列推理符号化并给出形式证明：
鸟会飞，猴子不会飞；所以，猴子不是鸟。

五、（12分）令 X={$x_1, x_2, \cdots, x_m$}, Y={$y_1, y_2, \cdots, y_n$}，问：

(1) 有多少不同的由 X 到 Y 的关系？即求 X×Y 的子集 有 2^{mn} 个.
(2) 有多少不同的由 X 到 Y 的映射？m^n
(3) 有多少不同的由 X 到 Y 的单射，双射 单射 m>n时有0个, m≤n时 有 P_n^m
2) 双射 m=n时 有 P_n^n 个 m≠n时有0个.

六、（8分）设 e 是奇数阶交换群 G 的单位元，试证 G 的所有元素之积为 e。

七、（15分）① <G, *>是个群，H，K 是其子群，在 G 上定义二元关系 R：$\forall a,b \in G, aRb \Leftrightarrow$ 存在$h \in H, k \in K$，使得 $b = h * a * k$，证明：R 是 G 上的等价关系。

② 在①中，若$|H| = m, |K| = n, |G| = mn$，m 与 n 互素，且 R 的某个等价类在 G 的乘法运算下构成 G 的一个子群，则 $R = G \times G$ 。

八、（8 分）把平面分成 β 个区域，每两个区域都相邻，问 β 最大为几？

九、（11 分）设 G 为非平凡有向图，V(G)为 G 的结点集合，若对 V(G)的任一非空子集 S，G 中起始结点在 S 中，终止结点在 V(G)−S 中的有向边都至少有 k 条，则称 G 是 k 边连通的。证明：非平凡有向图 G 是强连通的充要条件为它是 1 边连通的。 必要性反证法，充分性构造法.

十、（12 分）设 G 是一无向加权图且各边的权不相等，V，E 分别是 G 的结点集合和边集合，（V_1,V_2）是 V 的划分，即 $V_1 \cup V_2 = V$，$V_1 \cap V_2 = \phi$，且 $V_1 \neq \phi$，$V_2 \neq \phi$，则 V_1 与 V_2 间的最短边一定在 G 的最小生成树上。

中国科学院软件研究所

1999 年招收硕士学位研究生入学考试

"离散数学" 试题答案

一. 主合取范式： $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

主析取范式： $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3)$.

二. (1) 1; (2) 3; (3) 2; (4) 1.

三. 不是，取一特定解释域 I 如下： $[p(x,y)]_I =$"$x \leq y$", 论域 $D = N$(自然数集), 则显然有

$$[\forall x \exists y P(x,y)]_I = t;$$

$$[\exists y \forall x P(x,y)]_I = f.$$

故给定公式在 I 中为假，因此它不是谓词公式的有效式.

四.

(1) $\forall x(bird(x) \rightarrow fly(x))$ (前提 1)

(2) $\forall x(monkey(x) \rightarrow \neg fly(x))$ (前提 2)

(3) $bird(a) \rightarrow fly(a)$ (1) 脱帽

(4) $monkey(a) \rightarrow \neg fly(a)$ (2) 脱帽

(5) $\neg fly(a) \rightarrow \neg bird(a)$ 逆否律 (3)

(6) $monkey(a) \rightarrow \neg bird(a)$ 传递律 (4)(5)

(7) $\forall x(monkey(x) \rightarrow \neg bird(x))$ (6) 戴帽

五. 解： (1) 一个 X 到 Y 的关系对应于 $X \times Y$ 的一个子集. 因此，不同的 X 到 Y 的关系数 $= |\mathcal{P}(X \times Y)| = 2^{mn}$.

(2) 不同的由 X 到 Y 的映射个数 $= |\{f \mid f: X \rightarrow Y\}| = |\{(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m)) \mid f(x_i) \in Y, 1 \leq i \leq m\}| = \prod_{k=1}^{m} |\{f(x_k) \mid f(x_k) \in Y\}| = n^m$.

(3) 若 $m \neq n$ 则双射个数为 0; 若 $m = n$ 则双射个数为 $m!$; 若 $m > n$ 则单射个数为 0; 若 $m \leq n$, 从 Y 中任取 m 个元素有 C_n^m 种方法，此 m 个元素与 X 中 m 个元素间有

$m!$ 种不同的双射，共有单射 $C_n^m \cdot m!$ 种.

六. 证明：由于 G 为奇数阶交换群. 由拉格朗日定理，其中不可能有 2 阶元. 因此，$\forall a \in G(a \neq e), a \neq a^{-1}$，即 a 与 a^{-1} 是两个不同元素 $(a \neq e)$. 因此，G 的所有元素之积 $= e \cdot a_1 \cdot a_1^{-1} \cdot a_2 \cdot a_2^{-1} \cdot \ldots \cdot a_m \cdot a_m^{-1} = e$，其中 $a_1 \in G - \{e\}, a_2 \in G - \{a_1, a_1^{-1}, e\}, \ldots, a_m \in G - \{e, a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \ldots, a_{m-1}, a_{m-1}^{-1}\}, |G| = 2m+1$.

七. (1) 1. 自反性：$\forall a \in G$，有 $a = e * a * e$，e 为 G 的单位元，而 H, K 为 G 的子群，从而 $e \in H, e \in K$，故 aRa.

2. 对称性：若 $aRb \Rightarrow$ 存在 $h \in H, k \in K$ 使 $b = h * a * k \Rightarrow a = h^{-1} * b * k^{-1}$. 由于 H, K 为 G 的子群，$h^{-1} \in H, k^{-1} \in K$. 所以 bRa.

3. 传递性：若 $aRb, bRc \Rightarrow$ 存在 $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$ 使 $b = h_1 * a * k_1, c = h_2 * b * k_2$. 由于 H, K 为 G 的子群，得 $h_2 * h_1 \in H, k_1 * k_2 \in K$，使 $c = (h_2 * h_1) * a * (k_1 * k_2)$，所以 aRc.

因此 R 是等价关系.

(2) 设是 G 的子群的那个 R 的等价类为 $[a]_R = \{x \mid x \in G \wedge aRx\} = \{x \mid x \in G$ 且存在 $h \in H, k \in K$ 使 $x = h * a * k\} = \{h * a * k \mid h \in H, k \in K\}$.

由于该等价类为 G 的子群，故对任意的 $h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$，有 $(h_1 * a * k_1) * (h_2 * a * k_2)^{-1} \in [a]_R$. 取 $k_1 = k_2$，则得 $\forall h_1, h_2 \in H$，有 $h_1 * a^2 * h_2^{-1} \in [a]_R$，从而可以推出 $h_1 * a^{2r} * h_2^{-1} \in [a]_R$.

由于 G 为有限群，必存在某个 r_0 使 $a^{2r_0} = e$. 此时，有 $\forall h_1, h_2 \in H, h_1 * h_2^{-1} \in [a]_R$，即 H 为 $[a]_R$ 的子群.

同理 K 为 $[a]_R$ 的子群. 所以 $m \mid |[a]_R|, n \mid |[a]_R|$，而 m 与 n 互素 $\Rightarrow mn \mid |[a]_R|$，即 $|G| \mid |[a]_R|$. 又 $[a]_R$ 为 G 的子群，因此 $|[a]_R| \mid |G|$，从而 $|G| = |[a]_R|$，从而 $[a]_R = G$，即 $\forall g \in G$，有 aRg，而 R 为等价关系.

$\forall g_1, g_2 \in G$，由对称性，$aRg_1 \Rightarrow g_1Ra$；由传递性，$aRg_1, aRg_2 \Rightarrow g_1Ra, aRg_2 \Rightarrow g_1Rg_2, R = G \times G$.

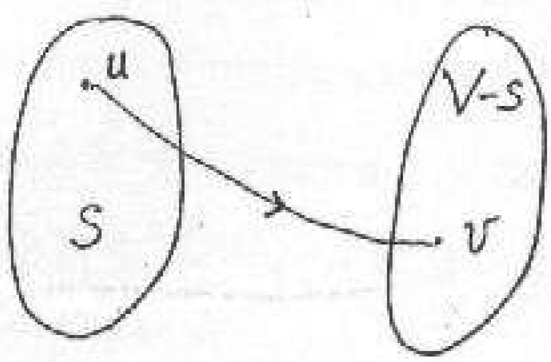
八. 在每个区域放一个结点，当两区域相邻时就在相应的两个结点间连一条边，如此构

造了一个平面图且是完全图 K_β. 而最大的平面完全图为 K_4, 所以 β 最大为 4.

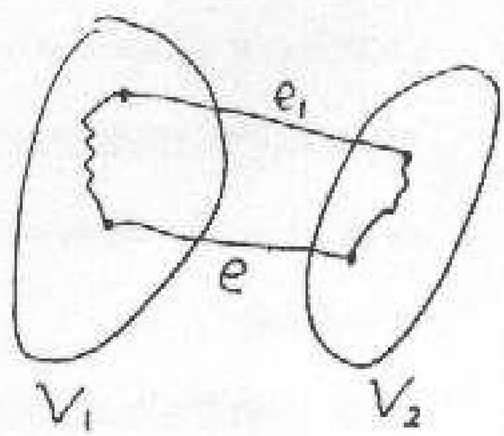
九. 必要性：设 G 是强连通的，此时若从 S 到 $V-S$ 没有有向边，则 S 中的任一顶 u 到 $V-S$ 中的任一顶 v 均没有有向道路，从而与 G 是强连通的矛盾，所以从 S 到 $V-S$ 至少有一条有向边.

充分性： 设 G 是边连通的， $\forall u, v \in V(G)$, 则 $\{u\}$ 到 $V(G)-\{u\}$ 至少有一条有向边，设为 uu_1; 而 $\{u, u_1\}$ 到 $V(G)-\{u, u_1\}$ 至少有一条有向边 uu_2 或 u_1u_2. 无论那种情况都有从 u 到 u_2 的有向道路. 因 G 中结点数有限，通过如上递归地求解，一定有 u 到 v 的有向道路，所以 G 是强连通的.

十. 设 e 是 v_1 与 v_2 之间的最短边， G 的最小生成树为 T. 若 e 不在 T 中，则 $T+e$ 有唯一的圈 C, 因 T 是 G 的最小生成树，所以 C 上除 e 之外一定有另一条 v_1 与 v_2 间的边 e_1 ，而 $w(e_1) > w(e)$. $T+e-e_1$ 是连通图且与 T 的边数相同，所以 $T+e-e_1$ 也是 G 的生成树，而 $w(T+e-e_1) = w(T) + w(e) - w(e_1) < w(T)$, 所以 T 不是最小生成树，矛盾.



(第九题图)



(第十题图)