中国科学院海洋研究所

2000 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目：高等数学 (丁)(一)

一、求极限 (14 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x - x}{x-\sin x}$; 2　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$. $\frac{1}{2}$

二、求导数 (14 分)

1. (6 分) $u = f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$　$= f_1'\cdot\frac{-x}{y^2} + f_2'\cdot\frac{1}{z}$

2. (8 分) $z = f(x,y)$ 是由 $\frac{x}{y} = \log\frac{z}{y}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

三、求积分 (27 分)

1. $\int\limits_0^1 \log(1+\sqrt{x})dx$;　$\frac{1}{2}$　　$\int_0^1 (x)'\ln(1+\sqrt{x})\,dx$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{e^x+6e^{-x}+5}$;　$\ln 3-\ln 2$

3. $\int\limits_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\log(1+x^2+y^2)dy$.

四、(8 分) 求抛物线 $y=x^2$ 上的点与直线 $x-y-2=0$ 上的点之间的最小距离. $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

五、(8 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

六、(14 分) 求微方程的通解

1. $xy'+y=y^2$;　　2. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

七、(8 分) 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\log(1+x)}, & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x<0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性和可微性.

八、(7 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数. 求证：$\int\limits_0^1|f'(x)|dx \ge M-m$ (这里 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值). $|f(1)-f(0)|$

用积分中值定理 存在ξ

$\int_0^1|f'(x)|dx = |f'(\xi)|\times 1 = |f'(\xi)|$　$0<\xi<1$　　由拉格朗日中值定理 $|f(1)-f(0)| = f'(\xi)\cdot 1$

又设 $f(a)=M$　$f(b)=m$　$\{a,b\in[0,1]\}$

∴由拉格朗日中值定理 存在ξ 使得 $f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$　∵ $a-b\le 1$

$\le f'(\xi)$