

中国科学院 — 中国科学技术大学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：高等数学丁 (A)

一、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微, $f(0) = 1$, 又

$$g(x) = \begin{cases} \arctg f(x), & x > 0 \\ ae^{x^2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg f(x) = a \cdot e^0 = a = \frac{\pi}{4}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+f(x)^2} f'(x), & x > 0 \\ a \cdot 2x \cdot e^{x^2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 可微, 求 a 和 $f'(0)$.

$$g'(0^+) = g'(0^-) \quad \frac{1}{2} f'(0) = 0 \quad f'(0) = 0$$

二、(10 分) $y' = x(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} = (1 - \frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$

1) $y = xe^{\frac{1}{x}}$, 求 y' . (4 分)

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \\ ax + by + cz = d, \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} = 0$$

$$a + b \frac{dy}{dx} + c \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{ay - bx}{yc - bz}$$

三、(10 分)

$$1) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}}{\cos x} = \frac{1}{3}$$

$$2) \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin x + x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0 + 1 = 1$$

$$f(x) = (\sin x^3)' = 3x^2 \cos x^3$$

四、(10 分) 设 $\sin x^2$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 求 $\frac{d}{dx} f(x)$ 和 $\frac{d}{dx} f(\sqrt{x})$.

五、(20 分) 求积分

$$1) \int \frac{2dx}{(1+x^2)(1-x^2)} = \int (\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2}) dx = \int (\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}) dx$$

$$2) \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \ln \sin x dx = \int \tan x \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\tan x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$3) \int_0^1 (x \sin x + x e^{x^2}) dx; \int_0^1 x \sin x dx = x(-\cos x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (-\cos x) dx = -\cos 1 + \sin 1$$

$$4) \int_0^1 x f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt. \quad \frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$$

六、(10 分) 设直线 l 是 $y = \sqrt{x}$ 在 $(1, 1)$ 处的切线, 求由直线 l , oy 轴及曲线

$y = \sqrt{x}$ 所围成的图形的面积.

$$S = \int_0^1 (\frac{1}{2}(x+1) - \sqrt{x}) dx = \frac{1}{12}$$

七、(10 分) 设 $\int_0^x f(t) dt = 5f(x) + 5x^2$. 求 $f(x)$.

八、(10 分) 求 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 由 $y = x, y = \sqrt{1-x^2}$ 及 $y = -x$ 围成.

九、(10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的收敛区间及其和函数.

$$t. f(x) = 5f'(x) + 10x, f(0) = 0$$

$$y = e^{-\frac{1}{5}x} \left(\int e^{\frac{1}{5}x} (-2x) dx + C \right)$$

$$f(x) = 10x + 50 - 50e^{-\frac{x}{5}}$$

试题名称：高等数学丁 (A)

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{2n-1} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^n - 3x^0 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 3$$

$$= 2 \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' - \frac{3}{1-x}$$

$$= \frac{3x-1}{(1-x)^2}$$

第 1 页共 1 页

