中国科学院—中国科学技术大学

2001 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试卷

试题名称：高等数学(乙)

一、填空题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上)

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}} =$ ________.

2. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \mathrm{arctg}t \end{cases}$，则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ ________.

3. 已知 $u + e^u = \mathrm{arctg}(xy)$，则 $du =$ ________________.

4. 设 D 为圆域 $(x-2)^2+(y-2)^2 \leq 2$，则

   $\iint_D \mathrm{arctg}\frac{y}{x}dxdy =$ ________

5. 微分方程 $x^2y' - 2xy = y^2$ 的通解为 ________________.

二、选择题 (本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内)

1. 下列选项正确的是

   (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n 1+\sin^n\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}} = 1$

   (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin^n 1+\sin^n\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}{n}} = 0$

   (C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin 1+\sin^2\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}} = 1$

   (D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sin 1+\sin^2\frac{1}{2}+\cdots+\sin^n\frac{1}{n}}{n}} = 0$ [ ]

2. 设 $M = \int_{-\pi}^{\pi}(e^{\cos x} - e^{-\cos x})dx$，$N = \int_{-\pi}^{\pi}\cos x(e^{\cos x} - e^{-\cos x})dx$，$P = \int_{-\pi}^{\pi}\cos x(e^{-\cos x} - e^{\cos x})dx$，则有

   (A) $P < M < N$ (B) $N < M < P$

   (C) $M < P < N$ (D) $N < P < M$

   [ ]

3. L 为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x = 0 \end{cases}$，走向与 x 轴正向成右手系.

   则 $\oint_L(x^2+y^2+z^2)dx =$

   (A) 0 (B) $2a^3$ (C) πa^3 (D) $2\pi a^3$ [ ]

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n =$

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 9 (C) 4 (D) 6

5. 已知等式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = ax$, 其中 $-\pi < x < \pi$, a 为常数, 则 $a =$

(A) 1 (B) -1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$ [

三、(4 小题, 每小题 7 分, 共 28 分)

1. 计算 $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

2. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^6)^2}$.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个发散的非负项级数, 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ 是否一定发散? 如果一定发散, 证明之; 如果不一定发散, 试举例说明之.

4. 设 n 是正整数, 多项式 $P_{2n}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. 证明: $P_{2n}(x)$ 没有实根.

四、(3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

1. 求 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ 在闭区域 D : $x^2 + y^2 \le 2x + 2y$ 上的最大值与最小值.

2. 计算曲面积分 $\iint_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\,dS$, 其中 S 为上半椭球面 $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1 (z \ge 0)$ 部分.

3. 计算曲面积分 $\iint_S \frac{z^2 dydz + yzdzdx + 2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 S 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 (z \ge 0)$ 的外侧.

五、(2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

1. 将 $f(x) = 1 + x (0 \le x \le \pi)$ 展为周期为 2π 的余弦级数. 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)}{(2n-1)^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4(2n-1)}{(2n-1)^2}$.

2. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$. 且 $[e^x \sin y + x^2 y + f(x)y]dx + [f'(x) + e^x \cos y + 2x]dy = 0$ 为一全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.