中国科学院－中国科学技术大学
2002年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：高等数学（丁） A卷

$1.\ I=e^{\lim_{x\to1}\frac{\ln(\sin\frac{\pi}{2}x)}{x-1}}=e^{\lim_{x\to1}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}{\sin\frac{\pi}{2}x}}=e^0=1$

2. 设 $x=tg\theta$ 则 $I=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}tg\theta(\sec\theta+tg\theta)=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$
$=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta+1}{\cos^2\theta}-1$
$=\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{2\cos\theta(-\sin\theta)}-1=-\frac{1}{2}$

一、求极限（每小题7分）

1. $\lim_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$；　2. $\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$；

3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{+\infty}\sin\frac{1}{t^2}dt}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$. $=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\sin\frac{1}{x^2}}{+\frac{1}{x^2}/2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{1+\frac{1}{x}}=2$

二、求积分（每小题7分） 偶 $=2\int_0^4 e^{\sqrt{x}}dx\xlongequal{\sqrt{x}=t}2\int_0^2 2te^t dt=4e^2+4$

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$；　2. $\int_{-4}^{4}e^{\sqrt{|x|}}dx$；　3. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}$. $\xlongequal{x=tg\alpha}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\alpha d\alpha}{tg\alpha\sec^2\alpha}$
$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}d\alpha=\frac{\ln 2}{2}$

$\xlongequal{x=4\sin^2\alpha}\int\frac{8\sin\alpha\cos\alpha d\alpha}{2\sin\alpha\cdot2\cos\alpha}=2\alpha+C$ $=2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}+C$　$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$

三、（9分） 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a^x-1}{x} & x>0,\\ \frac{1}{2}x+b & x\le0.\end{cases}$$

1 可导⇒则在 $x=0$ 处连续 $\lim_{x\to0^+}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\ln a\cdot a^x=\ln a=b$

可导 ⇒ $\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^-}f'(x)$

$\lim_{x\to0^+}\frac{xa^x\ln a-a^x+1}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2a\cdot a^x\cdot x}{2x}=\frac{1}{2}$

$\ln^2a/2=\frac{1}{2}\Rightarrow\ln a=\pm1$

1. 求 a,b 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导；
2. 求 $f'(x)$.

$\begin{cases}a=e\\b=1\end{cases}$ 时 $f'(x)=\begin{cases}\frac{e^xx-e^x+1}{x^2} & x>0\\ \frac{1}{2} & x\le0\end{cases}$；$\begin{cases}a=e^{-1}\\b=-1\end{cases}$ 时，$f'(x)=\begin{cases}\frac{-e^{-x}\cdot x-e^{-x}+1}{x^2} & x>0\\ \frac{1}{2} & x\le0\end{cases}$

四、（8分） 设 $f(u,v)$ 和 $\varphi(x,y)$ 都有连续的偏导数. $\varphi'_y(x,y)\ne0$, $z=f(x+y,xy)$, $y=y(x)$ 是由 $\varphi(x,y)=0$ 所确定的隐函数. 求 $\frac{dz}{dx}$. $=f'_u(1+y')+f'_v(y+xy')$

$\varphi'_1+\varphi'_2\cdot y'=0\Rightarrow y'=-\frac{\varphi'_x(x,y)}{\varphi'_y(x,y)}$　$=f'_u(1-\frac{\varphi'_1}{\varphi'_2})+f'_v(y-x\cdot\frac{\varphi'_1}{\varphi'_2})$

五、（8分） 设平面闭区域 D 由 x 轴，y 轴及直线 $x+y=6$ 围成. 求 $f(x,y)=xy(6-x-y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

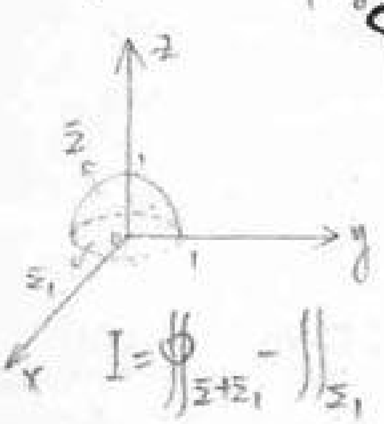
$\begin{cases}f'_x=6y-2xy-y^2=0\\f'_y=6x-x^2-2xy=0\end{cases}\xrightarrow{x,y\ne0时}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 此时 $f(2,2)=8$

三个边界 $x=0$ 时 $f(x,y)=0$；$y=0$ 时 $f(x,y)=0$；$x+y=6$ 时 $f(x,y)=0$

$f_{max}=8$　$f_{min}=0$

六、（9分） 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge0$ 的上侧. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^3+y^2)dydz+(y^3+z^2)dzdx+(z^3+x^2)dxdy$$



$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)dv=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=\frac{6}{5}\pi$

$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$

$\iint_{\Sigma_1}=-\iint_{D_{xy}}x^2dxdy=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r^2\cos^2\theta\cdot rdr=-\frac{\pi}{4}$　$I=\frac{6}{5}\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{29}{20}\pi$

七、1 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+3}}{\frac{1}{n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1$

$R=\frac{1}{\rho}=1$ $(-1,1)$

$x=1$时 $S(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ 发散（$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}>\frac{1}{2}$）

$x=-1$时 $S(-1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ $\begin{cases}u_n>u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$ 收敛

∴收敛区间为 $[-1,1)$

2 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{n+1}dt$

$=\frac{1}{x^2}\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n dt=\frac{1}{x^2}\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$

七、(9 分) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$.

1. 求幂级数收敛区间;
2. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+2)}$ 的值.

$=S(\frac{1}{2})=4\ln 2-2$

八、(8 分) 平面曲线 L 过原点，其在 (x,y) 的切线斜率为 $2x+y$. 求 L 的方程.

$(0,0)$

九、(6 分) $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导， $2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx=f(0)$. 试证必有 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=0$.

八、$y'=2x+y$, $y|_{x=0}=0$

$y'-y=2x$

$y=e^{-\int -dx}\left(\int e^{\int -dx}2x\,dx+C\right)$

$=e^x\left(\int e^{-x}2x\,dx+C\right)$

$=e^x\left[2x(-e^{-x})-2\int -e^{-x}dx+C\right]$

$=e^x\left[-2xe^{-x}-2e^{-x}+C\right]$

$=-2(x+1)+Ce^x$

$y=0$时 $x=0$代入 得 $C=2$

∴ $y=2e^x-2x-2$

九、∵ $y=f(x)$在$[0,1]$可导 ∴ $y=f(x)$在$[0,1]$连续

∃ $r^\circ\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $2\cdot\frac{1}{2}f(r^\circ)=f(0)$

即 $f(r^\circ)=f(0)$

由罗尔定理必∃ $\xi\in(0,r^\circ)$ 即 $\xi\in(0,1)$

使 $f'(\xi)=0$