

合肥智能所 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：离散数学

一. 判断题：(每小题 2 分，共 20 分)

1. “如果 a 是奇数，则 a 不能被 2 整除。如果 a 是偶数，则 a 能被 2 整除。因此，如果 a 是偶数，则 a 不是奇数”。上述推理是错误的。 ()
2. 假设 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ，且 $\exists y F(y)$ 条件成立，则有 $\exists y G(y)$ 。 ()
3. 假设 $A \cap C \subseteq B \cap C$ ，且 $A - C \subseteq B - C$ 条件成立，则有 $A \subseteq B$ 。 ()
4. 设 R 是从 A 到 B 的二元关系， S 是从 B 到 C 的二元关系， T 是从 C 到 D 的二元关系，则合成关系满足结合律，即 $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$ 。 ()
5. 设 T 是集合 A 上全体等价关系的集合， F 是 A 上全体划分的集合，则存在 T 到 F 的双射函数。 ()
6. 设 G 是一个群， $a, b \in G$ 且 $ab=ba$ ， a 、 b 的周期分别为 m 、 n ， m 和 n 互素，则 ab 的周期等于 $m+n$ 。 ()
7. 设 F 是一个域，则多项式环 $F[x, y]$ 中所有常数项为 0 的多项式组成的集合 A 是一个主理想。 ()
8. 设 f 是格 $\langle L, \leq_1 \rangle$ 到格 $\langle S, \leq_2 \rangle$ 的满同态映射，且 $\langle L, \leq_1 \rangle$ 是有界格，则 $\langle S, \leq_2 \rangle$ 也是有界格。 ()
9. 在一个 n 阶图 G 中，如果 V_i 到自身存在回路，则从 V_i 到自身存在长度小于等于 n 的回路。 ()
10. 对于给定的简单图无论是无向图还是有向图，其邻接矩阵皆对称。 ()

二. 多项选择题：(可能有一个或多个正确选项，每小题 5 分，共 30 分)

1. 请指出下列公式哪些是合式公式。 ()
 - a) $(Q \rightarrow R \wedge S)$;
 - b) $(P \Rightarrow (R \rightarrow S))$;
 - c) $((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$;
 - d) $(RS \rightarrow T)$;
 - e) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
2. 设 $R=\{1, 3, \text{II}, 4, 1, 9, 10\}$, $S=\{\{1\}, 3, 9, 10\}$, $T=\{1, 3, \text{II}\}$, $U=\{\{1, 3, \text{II}\}, 1\}$ 。请从下述各式中选出为真的式子。 ()

a) $S \subseteq R$;	b) $1 \in R$;
c) $1 \in S$;	d) $1 \subseteq U$;
e) $\{1\} \subseteq T$;	f) $\{1\} \subseteq S$;
g) $T \subseteq R$;	h) $\{1\} \in S$;
i) $\Phi \subseteq S$;	j) $T \subseteq U$;
k) $T \in U$;	l) $T \notin R$ 。
3. 指出下列函数哪些是满射的。 ()
 - a) $f: I \rightarrow I, f(j)=j(\text{mod } 3)$;
 - b) $f: N \rightarrow N, f(j)=\begin{cases} 1, & j \text{ 是奇数,} \\ 0, & j \text{ 是偶数;} \end{cases}$
 - c) $f: N \rightarrow \{0, 1\}, f(j)=\begin{cases} 0, & j \text{ 是奇数,} \\ 1, & j \text{ 是偶数;} \end{cases}$

d) $f: I \rightarrow N, f(i) = |2i| + 1;$

e) $f: R \rightarrow R, f(r) = 2r - 15.$

4. 设集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, 请从下面选出定义的二元运算 $*$ 关于集合 A 封闭的选项。

()

a) $x * y = \max(x, y);$

b) $x * y = \min(x, y);$

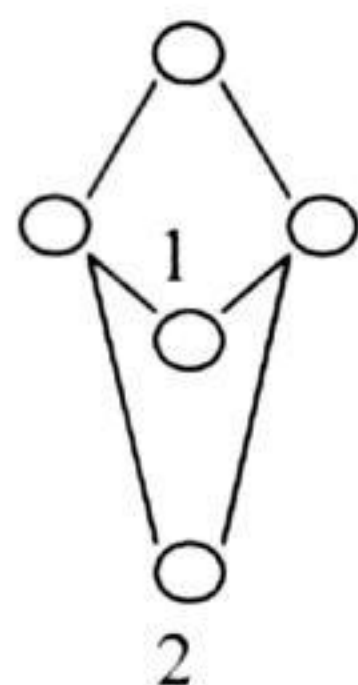
c) $x * y = \text{GCD}(x, y);$

d) $x * y = \text{LCM}(x, y);$

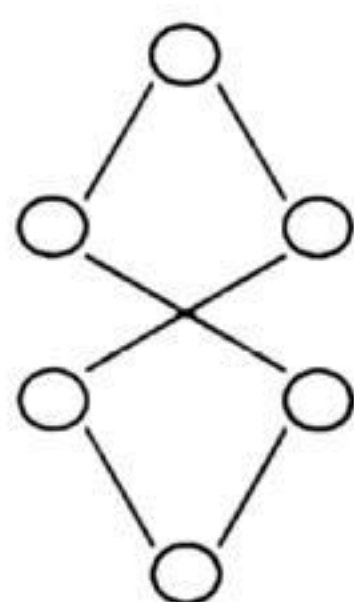
e) $x * y = \text{质数 } p \text{ 的个数, 使得 } x \leq p \leq y.$

5. 请从下图所示的偏序集中指出哪些是格。

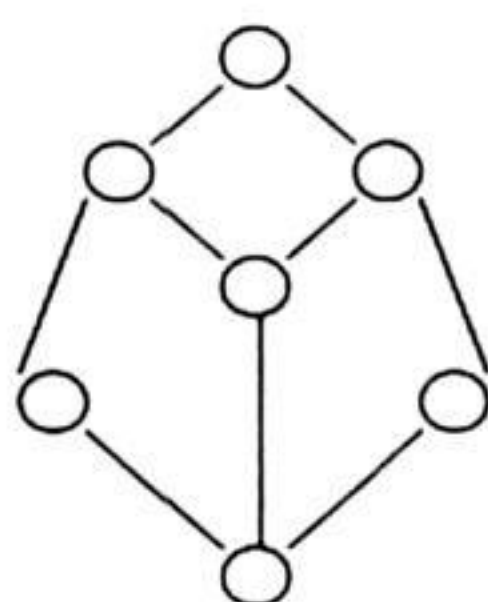
()



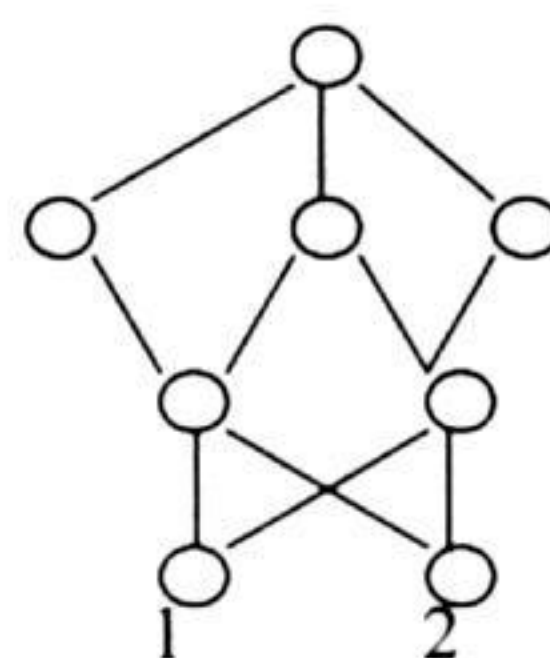
(a)



(b)



(c)



(d)

6. 请选出下面说法正确的选项。

()

a) 任一树至少有两片树叶。

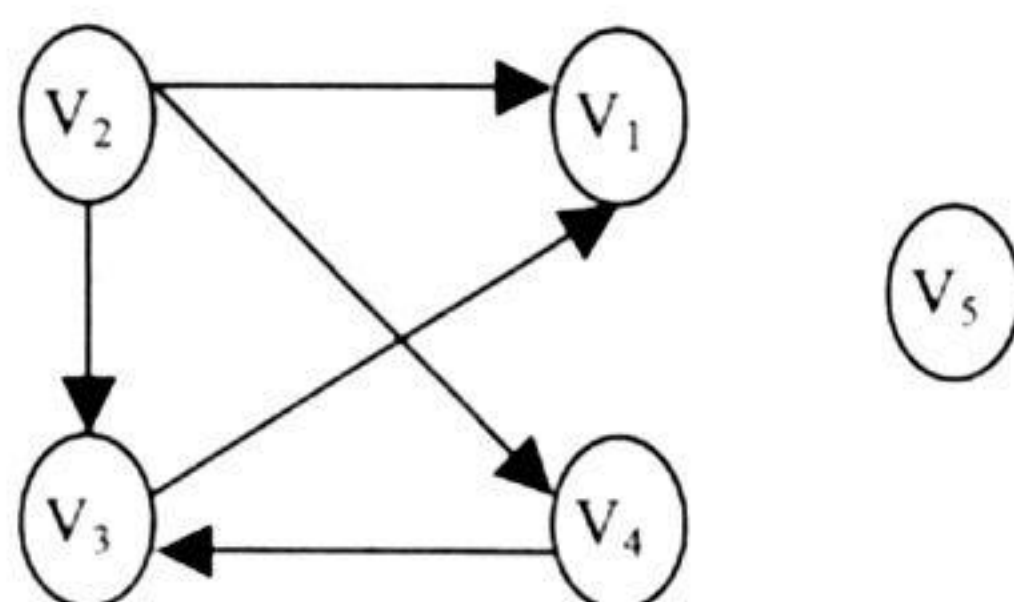
b) 连通图至少有一棵生成树。

c) 一条回路和任何一棵生成树的补至少有一条公共边。

d) 一个边割集和任何生成树至少有一条公共边。

三. 杂题: (每小题 10 分, 共 50 分)

1. 在下面一个有向图中, 求出该图的邻接矩阵, 可达性矩阵和距离矩阵。



2. 设 R 是非空集合 A 上的二元关系, R 满足下面 2 条件:

(1) R 是自反的; (2) 若 $\langle a, b \rangle \in R \wedge \langle a, c \rangle \in R$, 则 $\langle b, c \rangle \in R$.

证明 R 是 A 上的等价关系。

3. 设 $G = \langle Z, + \rangle, G' = \langle a \rangle$ 是 6 阶循环群。命 $\varphi(n) = a^n, \forall n \in Z$, φ 是 G 到 G' 的满同态。找出 G 的满足下述条件的所有子群:

1) 在 φ 下的象为 $\langle a^2 \rangle$; 2) 在 φ 下的象为 $\langle a^3 \rangle$ 。

4. 设 $\langle L, \leq \rangle$ 为一格, 它诱导的代数格为 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 。 S 是 L 的非空有限子集, 证明 S 有一个最小上界和最大下界。若 S 是 L 的任意非空子集, 结论是否成立?

5. 设 G 是边数 m 小于 30 的简单平面图, 试证明 G 中存在顶点 $v, d(v) \leq 4$ 。