中国科学院－中国科学技术大学
2003年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称：　电动力学(A)

一．选择题（共5题,每题4分，请答在答卷纸上！）

1.高斯定律不成立,如果：

A．存在磁单极；　B．导体为非等势体；　C．平方比律不精确成立；

D．光速为非普适常数；

2.在半径为R的球内充满介电常数为ε的均匀介质，球心处放一点电荷，球面为接地导体壳．如果挖去顶点在球心的立体角等于2的一圆锥体介质，则圆锥体中的场强与介质中的场强之比为：

A．1:1，　B．$2:4\pi$，　C　$\varepsilon_0:\varepsilon$，　D．$2\varepsilon_0:4\pi\varepsilon$，

3．两个无限大的接地导体平面组成一个60^0的二面角，在二面角内与两导体平面等距离处放一个点电荷Q，则它的象电荷的个数为：

A、3　B．5　C．7　D．无穷可数个．

4．一截面半径为b的无限长直圆柱导体，均匀地流过电流I，则储存在单位长度导体内的磁场能量为：

A．与b无关，　B．正比于b^2，　C．与I无关，　D 正比于I．

5.区域内任意一点$\bar{r}$处的静磁场可用磁标势描述，只当：

A．区域内各处电流密度为零；　B．$\bar{H}$对区域内任意封闭路径积分为零；

C．电流密度守恒；　D．$\bar{r}$处的电流密度为零；

二．填空题(共20分)（请答在答卷纸上！）

1．已知空间电场为$\bar{E}=\frac{a\bar{r}}{r^2}+\frac{b\bar{r}}{r^3}$(a,b为常数)，则空间电荷分布为（5分）

2．在同轴电缆中填满磁导率为μ_1,μ_2的两种磁介质，它们沿轴各占一半空间。设电流为I（如图），则介质μ_1中和介质μ_2中离中心轴r处的磁感应强度分别为（10分）。

3．一矩型波导管，管内为真空，管截面矩形的长和宽分别为a和b,且$a>b$，要使角频率ω的TE_{10}波能在管中传播，a应满足（5分）

三．1．写出麦克斯韦方程组；（8 分）。

2．由麦克斯韦方程组导出标势 Φ 和矢势 $\vec{A}$ 所满足的基本方程组；（12 分）

3．在洛仑茨兹规范下，由上述基本方程组导出达朗贝尔方程组。（10 分）

四． 半径为 R 的带电球面，面电荷密度为 $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$（$\theta$ 为常量），球外充满介电常数为 ε 的均匀介质（如图），求球内外的电势和电场强度。（30 分）

五．一电偶极子位于坐标系的原点，它的电偶极矩为 $\vec{P} = P_0 \cos\omega t \vec{e}_z$。试求：

1．它在 $r >> \lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ 处的辐射场的电场强度和磁场强度；（15 分）

2．该处的辐射场能流密度。（5 分）

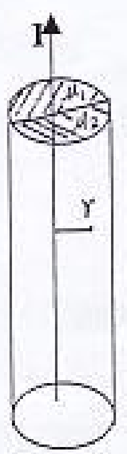
提示：直角坐标基矢与球坐标基矢关系为：

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\phi \end{pmatrix}$$

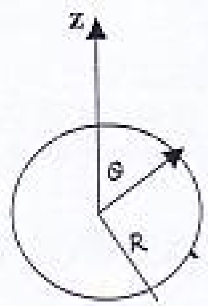
六．参考系 $\Sigma'(x', y', z')$ 以匀速度 $\vec{V} = (V,0,0)$ 相对于惯性系 $\Sigma(x,y,z)$ 运动。在 Σ 系观测，空间某区域静磁场为 $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$。试求：

1．在 Σ' 系观测，该区域内的电磁场；（20 分）

2．若该区域内有一电荷量为 q 的粒子相对于 Σ 静止，求出 Σ' 系观测，这个粒子所受到的电磁力（10 分）．



第二．2 题图



第四题图

中国科学院 & 中国科学技术大学
2003 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

试题名称：　电动力学(A)

一．　选择题（共 **5** 题,每题 **4** 分）

1．C;　　2. A;　　3.　B;　4. A;　　5.　B;

二．　填空题(共 **20** 分)

1．$\rho=\varepsilon_0(\frac{a}{r^2}+4\pi b\delta(\vec{r}))$；

2．介质μ_1中磁感应强度和介质μ_2中的磁感应强度都为$\frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi r(\mu_2+\mu_2)}$；

3．$a>\frac{c\pi}{\omega}$；

三．　解：**1**。麦克斯韦方程组：(每式各 **2** 分)

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad (2)$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0.\qquad (4)$$

2．φ和$\vec{A}$满足的基本方程：

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A},\quad \vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\qquad (5)\ (4\text{ 分})$$

将（5）代入（1），（2），得：

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\qquad (6)\ (4\text{ 分})$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\vec{J},\qquad (7)\quad (6\text{ 分})$$

3. 洛仑兹规范：

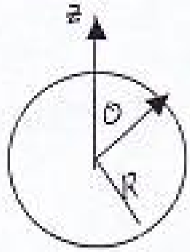
$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\text{，}\qquad (8)(2\text{ 分})$$

对（6），（7）两式，应用（8）可得到达朗贝尔方程组：

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\text{，}\qquad (3\text{分})$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\text{，}\qquad (3\text{分})$$

四. 解：



如图，设球内外电势分别为φ_1,φ_2。因球内外电荷密度都为零，故φ_1,φ_2满足方程：

$$\nabla^2\varphi_1=0\text{，}\qquad r<R\qquad (1)$$

$$\nabla^2\varphi_2=0\text{，}\qquad r>R\qquad (2)(3\text{分})$$

边条件：

当$r\to\infty$，$\varphi_2\to 0$；当$r\to 0$，φ_1为有限；（3）（3分）

边值关系：

$$\varphi_1=\varphi_2(r=R)\text{ ，}\qquad (4)$$

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}=-\sigma_0\cos\theta(r=R)\text{，}\qquad (5)\ (4\text{分})$$

由对称性及边条件，方程（1）和（2）的解可写为：

$$\varphi_1=\sum a_n r^n P_n(\cos\theta)\text{，}\qquad (6)$$

$$\varphi_{21}=\sum\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta)\text{，}\qquad (7)(4\text{分})$$

利用边值关系（4），（5），可得到：

$$b_n=a_nR^{2n+1}\text{，}\qquad (n=0,1,2,\cdots)\qquad (8)$$

$$2\varepsilon b_1+a_1\varepsilon_0R^3=\sigma_0R^3\text{，}\qquad b_n=-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{n}{n+1}a_nR^{2n+1},(n\neq 1)\qquad (9)(4\text{分})$$

解得：

$$a_1=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\text{，}\qquad b_1=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}R^3\text{，}\qquad a_n=b_n=0,(n\neq 1)\text{，}\qquad (10)(4\text{分})$$

求得：

$$\varphi_1=\frac{\sigma_0 r}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\cos\theta=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}(\vec{r}\cdot\vec{e}_z)\text{，}\qquad (11)$$

$$\varphi_2=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}(\vec{r}\cdot\vec{e}_z)\text{，}\qquad (12)\ (4\text{分})$$

球内外电场:

$$\vec{E}_1=-\nabla\varphi_1=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon+\varepsilon_0}\vec{e}_z, \qquad (13)$$

$$\vec{E}_2=-\nabla\varphi_2=\frac{\sigma_0 R^3}{2\varepsilon+\varepsilon_0}[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{e}_z)}{r^5}\vec{r}-\frac{1}{r^3}\vec{e}_z], \qquad (14)（4分）$$

五． 解：辐射场：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{d\vec{p}(t')}{dt'}=-\frac{\mu_0\omega p_0}{4\pi r}\sin\omega t'\vec{e}_x\\&=\frac{\mu_0\omega p_0}{4\pi r}\sin(kr-\omega t)\vec{e}_x\\&=\frac{\mu_0\omega p_0}{4\pi r}\sin(kr-\omega t)(\sin\theta\cos\phi\vec{e}_r+\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\theta-\sin\phi\vec{e}_\phi)\end{aligned} \quad ,（5分）$$

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r},t)&=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}=\frac{\omega p_0}{4\pi}\nabla\times[\frac{\sin(kr-\omega t)}{r}\vec{e}_x]\\&=\frac{\omega p_0}{4\pi r}[\nabla\sin(kr-\omega t)]\times\vec{e}_x\\&=\frac{\omega^2 p_0}{4\pi c}\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}(\sin\phi\vec{e}_\theta+\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)\end{aligned} \quad ,（5分）$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t)&=c\mu_0\vec{H}\times\vec{e}_r\\&=\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi}\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}(\sin\phi\vec{e}_\theta+\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\phi)\times\vec{e}_r\\&=\frac{\mu_0\omega^2 p_0}{4\pi}\frac{\cos(kr-\omega t)}{r}(\cos\theta\cos\phi\vec{e}_\theta-\sin\phi\vec{e}_\phi);\end{aligned} \quad （5分）$$

能流密度：

$$\begin{aligned}\vec{S}(\vec{r},t)&=\vec{E}\times\vec{H}\\&=\frac{\mu_0\omega^4 P_0^2}{16\pi^2 c}\frac{\cos^2(kr-\omega t)}{r^2}(\sin^2\phi+\cos^2\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r\\&=\frac{\omega^4 P_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\cos^2(kr-\omega t)}{r^2}(1-\sin^2\theta\cos^2\phi)\vec{e}_r\text{。}\end{aligned} \quad （5分）$$

六．解：（1）由电磁场的变换关系得：

$E'_x = E_x = 0$，（2 分）

$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = -\gamma vB_z$，（3 分）

$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) = \gamma vB_y$，（3 分）

$B'_x = B_x$，（2 分）

$B'_y = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) = \gamma B_y$，（3 分）

$B'_z = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) = \gamma B_z$，（3 分）

$\vec{E}' = (0, -\gamma vB_z, \gamma vB_y)$，（2 分）

$\vec{B}' = (B_x, \gamma B_y, \gamma B_z)$，$\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$；（2 分）

（2）粒子所受的力为：

$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q\vec{E}' + q(-v\vec{e}_x) \times \vec{B}'$

$= q(-\gamma vB_z\vec{e}_y + \gamma vB_y\vec{e}_z) - qv\vec{e}_x \times (B_x\vec{e}_x + \gamma B_y\vec{e}_y + \gamma B_z\vec{e}_z)$；（10 分）

$= 0$