中国科学院－中国科学技术大学

2005年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题名称： 高等数学（B）

一、填空题（本题5小题，每小题5分，满分25分，把答案填在答题纸上）.

1. 当 $x \to 0$ 时，$x - \sin x$ 与 x^{α} 为同阶无穷小量，则 α 为 3

2. 曲面 $e^{-z} + z + xy = 2$ 在点 $(1,1,0)$ 处的切平面方程是: $n = \{F_x, F_y, F_z\} = \{y, x, 1-e^{-z}\} = \{1,1,0\}$

3. 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上找一点，它到直线 $2x + y = 4$ 的距离最短，该点的坐标为: $(\frac{2\sqrt5}{5}, \frac{\sqrt5}{5})$

4. 方程 $e^{\cos y}\sin y dy = x^2 dx$ 的通解为: 两边积分 分离积分 $-e^{\cos y} = \frac{x^3}{3} + C$, $y = \arccos(\ln(-\frac{x^3}{3} - C))$ $y = \sqrt{1-x^2}$ $y' = -2$ 得 $x = \frac{2\sqrt5}{5}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x \frac{\cos(t^2)}{x} dt =$: 0 用洛必达法则

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，满分20分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，把所选项的字母填在答题纸上）.

1. 已知函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导且 $f(x) < 0$，则 D
   (A) $f(-x) > 0$. (B) $f'(-x) > 0$.
   (C) $\lim\limits_{x\to 0} f(-x) < 0$. (D) $\int_0^x f(-x)dx < 0$. 定积分定义(面积.)
   ∵ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) < 0$ 则有 $f(-x) < 0$

2. 下列方程在空间直角坐标系中表示旋转抛物面方程的是 B
   (A) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (B) $x^2 + y^2 + z = 1$
   (C) $x + y + z^2 = 1$ (D) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

3. 将积分 $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{x(2-x)}}^{\sqrt{x(2-x)}} \sqrt{x^2+y^2} dy$ 化为极坐标下的累次积分为
   $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$
   $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$
   $r(\theta) = r\cos\theta = 2\cos\theta$
   $x = 2$ 则 $y = 2$
   (A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$ (B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2 dr$
   (C) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r dr$ (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr$

$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x + n}{n^2} = \lim \frac{1}{n} + \frac{\sin x}{n^2} = 0$

4. 设 $x \in (-\infty, +\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sin x + n)}{n^2}$
   (A) 发散. (B) 绝对收敛.
   (C) 条件收敛. (D) 收敛与发散与 x 的取值有关.
   $|u_n| > |u_{n+1}|$ 给出级数 又 $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n}$ 发散 调和级数 发散

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并且 $\int_0^1 f(x)dx = 4$，则积分 取特殊值 $f(x) = 8x$ $f(y) = 8y$
   $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x)f(y)dx\right) dy =$
   (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

三、（本题10分）设函数 $f(x)$ 二次可导，$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$，求 洛必达法则
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + x + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{2}\arctan x}{\sin^2 x}.$$
$= \frac{f'(x) + 1 + \frac{1}{4}(\frac{-2}{(1-x^2)}) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}}{\sin 2x} \to 0$
$= \frac{f''(x) - (\frac{1}{1-x^2})' ...}{2\cos 2x}$

四、（本题10分）已知当 $-1 < x < 1$ 时 $f'(\sin x) = \cos 2x + \tan^2 x$，并且 $f(0) = 0$，求 $= \frac{2}{2} = 1$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$
$= 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{1-\sin^2 x} - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 2x^2$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-x^2} - 2x^2 = 1$ 导数

五、（本题10分）设当 $x > 0$ 时，$f\left(\frac{\ln x}{2}\right) = \sqrt{x}$ 且 $f(\varphi(x)) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$，计算积分
令 $\frac{\ln x}{2} = t$ 则 $x = e^{2t}$ ∴ $f(t) = e^t$ ∴ $f(\varphi(x)) = e^{\varphi(x)} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ ∴ $\varphi(x) = (\ln(1+x))^{\frac{1}{2}} = ...$
$$\int_1^2 \varphi(x) dx.$$
$\int_1^2 \varphi(x)dx = \int_1^2 x^{-2}\ln(1+x) dx$ (分部积分法)
$= [x \ln(1+x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{1+x} \cdot x dx$
$= (\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3) + \int ...$
$= (\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3) + [\ln x] - [\ln(1+x)]$
$= 3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$

六、（本题10分）设 z 是由方程 $x - \frac{2}{y} + z + e^z = 0$ 所确定的 x, y 的函数，求 z 在点 $(1,1,0)$ 的全微分 dz.
令 $F(x,y,z) = x - \frac{2}{y} + z + e^z$
$F_x = 1$ $F_y = \frac{2}{y^2}$ $F_z = 1 + e^z$
$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-1}{1+e^z}$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-2}{y^2(1+e^z)}$
∴ $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ 在点 $(1,1,0)$
$= -\frac{1}{1+e^z}dx - \frac{2}{y^2(1+e^z)}dy = -\frac{1}{2}dx - dy$

∴ $x \le y^2$

设 $D_1 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$ $D_2 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \le y < 1 \end{cases}$

∴ $\iint_D |x - y^2| dxdy$
$= \iint_{D_1} |x-y^2| dxdy + \iint_{D_2} |x-y^2| dxdy$
$= \iint_{D_1} (x-y^2) dxdy + \iint_{D_2} (y^2-x) dxdy$
$= \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} (x-y^2) dy + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1} ... dy$

七、（本题10分）计算 $\iint_D |x - y^2| dxdy$，其中区域 $= \frac{1}{60}$
$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}.$$

八、（本题10分）求由曲线 $y = \int_0^x 4^t(1 + 2t\ln 2)dt$ 与直线 $y = 4x$ 所围成的图形的面积.
先求曲线方程 → 求交点 → 定积分

(1) $y = \int_0^x (4^t + 2t \cdot 4^t \cdot \ln 2) dt$
$= \int_0^x 4^t dt + \int_0^x (\ln 4 \cdot 4^t \cdot t) dt$
$= \int_0^x 4^t dt + \int_0^x (4^t)' \cdot t dt$
$= \int_0^x 4^t dt + [4^t \cdot t]_0^x - \int_0^x 4^t dt$
$= 4^x \cdot x$

$\begin{cases} y = 4^x \cdot x \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow$ 交点 $(0,0)$ $(1,4)$
∴ 面积 $S = \int_0^1 (4^x \cdot x - 4x) dx$
$= \int_0^1 4^x \cdot x dx - \int_0^1 4x \cdot dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 2^{x^2} \cdot d(x^2) - [2x^2]_0^1$
$= \frac{1}{2}\int_0^1 2^t dt - 2$
$= \frac{1}{2}[\frac{2^t}{\ln 2}]_0^1 - 2$
$= \frac{1}{2\ln 2} - 2$

九、（本题10分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 三阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^{-\frac{1}{2}})$ 绝对收敛.

十、（本题共10分）设平面 Π 与平面 Π': $x - 2y - z + 4 = 0$ 垂直，在曲线
$(1, -2, -1)$
$$\begin{cases} x = 4t + t^3 \\ y = -t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$
$3t^2 + 4$ $-2t$ $3t^2$
∵ Π' 垂直于 Π 的法向量 和切线的方向向量 所得的向量
切线 $S \perp \Pi'$ 平行则 切线的方向量 $S \perp \Pi'$ 法向量垂直
则 $(3t^2+4) \cdot 1 + (-2t)(-2) + 3t^2(-1) = 0$ $t = -1$
∴ 切向量为 $(7, 2, 3)$
∴ 法向量为 $n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \{-4, -10, 16\}$

的所有切线中，存在一条切线完全位于平面 Π 中且与 Π' 平行，求平面 Π 的方程.

十一、（本题10分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 具有二阶连续导函数. 当 $x \ne 0$ 时
$$f(x) = \int_0^x \frac{x(x-t)f(t) + 1}{x} dt.$$
求 $f(x)$.

十二、（本题10分）求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{n-1}$ 的收敛半径和收敛域. 设 $\frac{1}{\rho} = R$

十三、（本题5分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 绝对收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 绝对收敛.
$a_n^2 > a_{n+1}^2$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

十一 $f(x) = \int_0^x [(x-t)f(t) + \frac{1}{x}] dt$
$= \int_0^x x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + \int_0^x \frac{1}{x} dt$
$= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t) dt + \frac{1}{x}\int_0^x dt$
$f'(x) = \int_0^x f(t)dt + x \cdot f(x) - x f(x) + 1$
$= \int_0^x f(t)dt + 1$
$f''(x) = f(x)$
令 $f(x) = y$
$y'' - y = 0$
求二阶常系数齐次线性微分方程 $r_1 = 1$ $r_2 = -1$
∴ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = f(x)$