2006 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

* 说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称： 高等数学 A

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1. $\int \tan x \ln(\cos x) dx =$ ________________。

2. 已知 $z = f(\frac{1}{x^2} + 2lny)$, f 为可微函数，则 $x^3\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} =$ ________________。

3. 平面 $3x + \lambda y - 3z + 16 = 0$ 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 相切，则 $\lambda =$ ________________。

4. 设 D 为圆域 $x^2 + y^2 \le 4x$，则 $\iint\limits_D \arctan e^{xy} dxdy =$ ________________。

5. 微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$ 的通解为 ________________。

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分，每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。）

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有三阶导数，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0} = 1$，则（　　）

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是极值，$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

2. 设 $f(x) = \int_0^{2x}(e^{\sin t} - e^{-\sin t})dt$，则（　　）

(A) $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数

(B) $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数

(C) $f(x)$ 是以 π 为周期的偶函数

(D) $f(x)$ 是以 π 为周期的奇函数

3. $f(x) = \int_0^{1-\cos x}(e^{t^2} - 1)dt$，$g(x) = x^6 + x^7$, 则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}=($　　$)$

(A) $\ln\frac{3}{4}$　　(B) $\ln\frac{4}{3}$　　(C) $\frac{4}{9}$　　(D) $\frac{9}{4}$

5. 已知 $a-|x|=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(-\pi\le x\le\pi)$，a 为常数，则 $a=($　　$)$

(A) $-\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $-\pi$　　(D) π

三、（5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

1. 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$，证明方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 上只有唯一解。

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ $(A\neq 0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$。

4. 利用欧拉积分计算 $\int_1^3\sqrt[4]{\frac{3-x}{x-1}}dx$。

5. 将 $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ 在 $x=-1$ 展成幂级数，并求收敛域。

四、（3 小题，每小题 12 分，满分 36 分）

1. 设 $y=f(x)$ 有二阶连续导数，且曲线积分

$$\int_L(y^2+2yf(x)-6xye^{-x})dx+(f'(x)-f(x)+2xy+2e^{-x})dy=0,$$

L 是平面上任意一条方向为逆时针的封闭曲线。

(1) 已知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $y=f(x)$，

(2) 计算 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$。

2. 求二元函数 $f(x,y)=xy(2x+y-1)$ 在由 x 轴、y 轴和直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值。

3. 设 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，$\vec{V}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{3/2}}$。

(1) 求 $div\vec{V}$，　(2) 求曲面积分 $\iint\limits_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{3/2}}$。

试题名

五、（ 2 小题，每小题 12 分，共 24 分）

1. 将 $f(x)=\pi^2-x^2 \quad (-\pi\le x\le\pi)$ 展成周期为 2π 的 Fourier 级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\le M$, 又 $f(0)<0, f(a)<0, \max\limits_{0\le x\le a} f(x)=0$，证明

(1) $|f'(0)|+|f'(a)|\le aM$ 。

(2) $\int_0^a |f(x)|dx \le \frac{M}{6}a^3$

科目名称：	高等数学 A

一、 1. $-\dfrac{\ln^2(\cos x)}{2}+c$　　2. 0　　3. $\lambda=\pm 2$

4. π^2　　5. $y=\dfrac{1}{x}(\arctan x+c)$

二、 1. C　　2. C　　3. D　　4. C　　5. B

三、 1. 解：由 $x=\ln(1+t^2), y=t-\arctan t$ 可得：

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2t}{1+t^2}dt, &(1\text{ 分})\\ dy &= \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt. &(2\text{ 分})\end{aligned}$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t}{2}. \qquad (4\text{ 分})$$

由此可得

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}dt. \qquad (6\text{ 分})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{1+t^2}{4t}. \qquad (8\text{ 分})$$

2. 证明：设 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1 \quad 0\le x\le 1,$　　（ 2 分）

$F(0)=-1<0 \quad F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt>0.$

因为 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由零值定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F(\xi)=0$,
所以所讨论的方程在 $(0,1)$ 内有解．（ 5 分）

又 $F'(x)=2-f(x)>2-1=1$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格增，因此 $y=F(x)$ 只能一次穿过 x 轴．

即方程 $2x-\int_0^x f(t)dt-1=0$ 在 $(0,1)$ 内只有唯一解．（ 8 分）

3. 解：令 $nx=t$，则 $\int_0^1 f(nx)dx=\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt.$　　（ 2 分）

设　$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$　　（ 3 分）

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=\infty.$　　（ 4 分）

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.\quad（7分）$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A\quad（8分）$$

4. 解：令 $x=2t+1$（2分），则

$$\int_1^3\sqrt[4]{\frac{3-x}{x-1}}dx=2\int_0^1\sqrt[4]{\frac{(1-t)}{t}}dt=2\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}dt\quad（4分）$$

$$=\ 2B(\frac{3}{4},\frac{5}{4})=2\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.\quad（8分）$$

5. 解：

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right]$$

$$=\ \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+1)-2}-\frac{1}{(x+1)+1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{-2(1-\frac{x+1}{2})}-\frac{1}{1+(x+1)}\right]\quad（2分）$$

$$=\ \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n\right]$$

$$=\ -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right](x+1)^n.\quad（5分）$$

因为 $\left|\frac{x+1}{2}\right|<1$, 且 $|x+1|<1$, 所以收敛域为 $|x+1|<1$, 即 $-2<x<0$.

（8分）

四、解：(1) 因为 $\int_L(y^2+2yf(x)-6xye^{-x})dx+(f'(x)-f(x)+2xy+2e^{-x})dy=0$, L 是平面上任意一条方向为逆时针的封闭曲线，所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

由此得方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=(2-6x)e^{-x}$.

为方便方程写成

$$y''(x)-y'(x)-2y(x)=(2-6x)e^{-x}.\quad（3分）\qquad(1)$$

对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-r-2=0$, 有 $r_1=-1, r_2=2$, 所以 $y''(x)-y'(x)-2y(x)=0$ 的通解为

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}.\quad（5分）$$

设方程 (1) 有特解 $y^*(x)=x(ax+b)e^{-x}$, 将 $y^*(x),(y^*(x))',(y^*(x))''$ 代入方程 (1) 解得 $a=1,b=0$. 所以 $y^*=x^2e^{-x}$, 得方程 (1) 的通解为

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+x^2e^{-x}\quad(\text{ 7 分 })$$

由 $f(0)=0$， $f'(0)=0$，得 $y=f(x)=x^2e^{-x}$. （ 8 分 ）

(2) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2e^{-x}dx=2.\ (\text{ 12 分 })$$

2. 解：先求 D 内驻点，由

$$f_x{}'=y(4x+y-1)=0,\quad f_y{}'=x(2x+2y-1)=0,\ (\text{ 2 分 })$$

得 D 内唯一驻点 $M_0(\frac{1}{6},\frac{1}{3})$. （ 4 分 ）

$f(M_0)=f(\frac{1}{6},\frac{1}{3})=-\frac{1}{54}$. （ 5 分 ）

在边界 $x=0$, $y=0$, $f(x,y)=0$. （ 6 分 ）

在边界 $x+y=1$, 把 $y=1-x$ 代入 $f(x,y)$ 中，得

$f=x^2-x^3\quad(0\le x\le 1)$, $f'=2x-3x^2=0$, 得驻点 $x=0$(舍去),$x=\frac{2}{3}$.

$f|_{x=\frac{2}{3}}=\frac{4}{27}$ （ 10 分 ）.

所以 $f(M_0)=f(\frac{1}{6},\frac{1}{3})=-\frac{1}{54}$ 为 D 上的最小值， $f|_{x=\frac{2}{3}}=\frac{4}{27}$. 为 D 上最大值. （ 12 分 ）

3. 解： (1)$P=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-3/2}x$, $Q=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-3/2}y$,
$R=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-3/2}z$.

$\frac{\partial P}{\partial x}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-5/2}(b^2y^2+c^2z^2-2a^2x^2)$,

$\frac{\partial Q}{\partial y}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-5/2}(a^2x^2+c^2z^2-2b^2y^2)$,

$\frac{\partial R}{\partial z}=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{-5/2}(a^2x^2+b^2y^2-2c^2z^2)$,

所以 $div\overrightarrow{V}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$ (6 分)

(2). 在 S 内作椭球面 $\sum:a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\varepsilon^2$,$\sum$ 所围的空间区域为 V, 体

积为 $\frac{4\pi\varepsilon^3}{3abc}$,$S$ 与 $\sum$ 所围的空间区域为 V_1.　　(7 分)

$$\iint\limits_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{3/2}} = \iint\limits_{S+\sum_{内}} + \iint\limits_{\sum_{外}} \qquad (9\text{ 分})$$

$$= \iiint\limits_{V_1} div\vec{V}\,dv + \iint\limits_{\sum_{外}} \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\varepsilon^2}. \qquad (10\text{ 分})$$

$$= 0+\frac{1}{\varepsilon^2}\iiint\limits_V 3dv = \frac{4\pi}{abc}. \qquad (12\text{ 分})$$

五、 1. 解：因为 $f(x)$ 为偶函数，所以只有余弦项

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi^2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2-x^2)\cos nxdx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nxdx \\ &= -\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi 2x\sin nxdx \\ &= -\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi cosnxdx \\ &= \frac{4}{n^2}(-1)^{n-1}. \qquad (\ 4\text{ 分}) \end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\le x\le\pi). \qquad (\ 6\text{ 分})$$

令 $x=0$, 得 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.　　(8 分)

由 Parseval 等式

$$\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty{a_n}^2=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f^2(x)dx,$$

$$\frac{8}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^\infty\frac{16}{n^4}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2-x^2)^2dx=\frac{16}{15}\pi^4,$$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \qquad (\ 12\text{ 分})$$

2. 证明： (1) 由已知， $f(x)$ 的最大值在内点 x_0 取得，即有 $f(x_0)=0$. 又 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可微，由 Fermat 定理知 $f'(x_0)=0\quad x_0\in(0,a)$　　(3 分)

所以

$$f'(0)-f'(x_0)=f''(\xi_1)(0-x_0) \qquad 0<\xi_1<x_0,$$
$$f'(a)-f'(x_0)=f''(\xi_2)(a-x_0) \qquad x_0<\xi_2<a.$$

又 $|f''(x)|\le M$, 因此

$$|f'(0)|+|f'(a)|\le Mx_0+M(a-x_0)=Ma. \qquad (\ 6\text{分}\ )$$

(2) $f(x)$ 在 x_0 展成一阶 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2 \qquad \xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间} \qquad (\ 9\text{分}\ )$$

所以

$$\int_0^a|f(x)|dx\le\frac{M}{2}\int_0^a(x-x_0)^2dx=\frac{M}{6}(a^3-3a^2x_0+3ax_0{}^2)\le\frac{M}{6}a^3 \qquad (\ 12\text{分}\ )$$