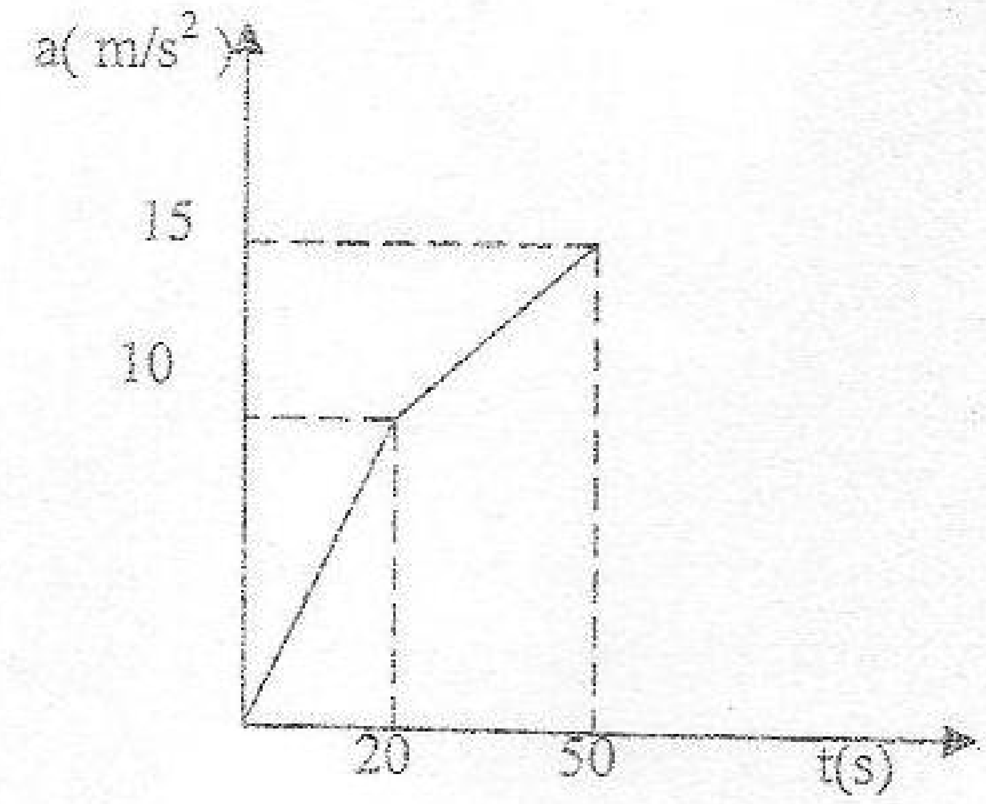
*说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称：　　普通物理 A

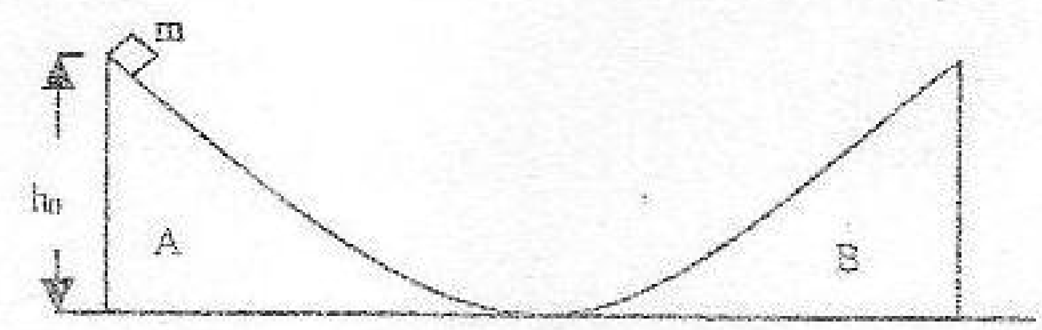
一、（15分）火箭沿竖直方向由静止向上发射，加速度随时间的变化规律如图所示。试求：

（1）火箭在 t=50s 时燃料用完瞬间所能达到的高度；

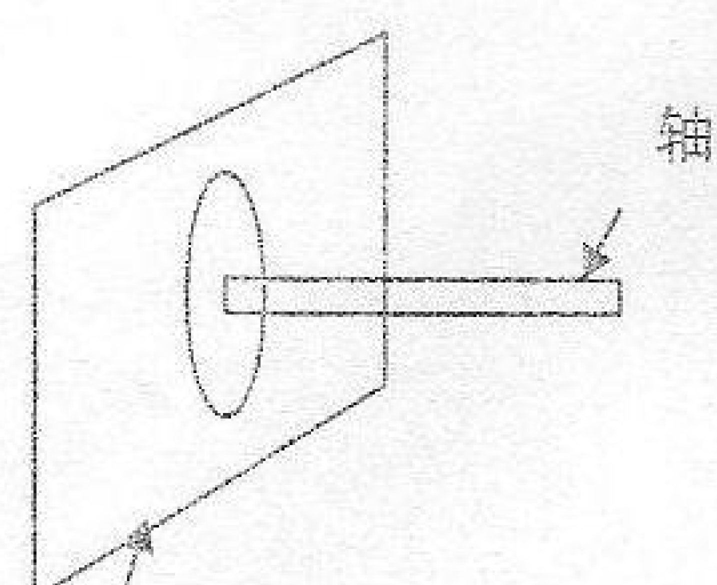
（2）此时刻火箭的速度。



二、（20分）两个形状完全相同，质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，放在地板上。今有一质量为 m 的小物块，由静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0。所有接触面均光滑，试求小物块在 B 轨上上升的最大高度（设 A、B 导轨与地面相切）。

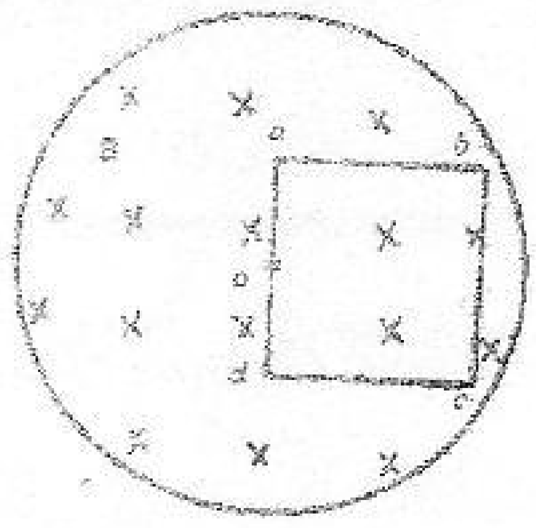


三、（20分）以力 $\vec{F}$ 将一块粗糙平面紧压在轮上，平面与轮之间的滑动摩擦系数为 μ，轮的初角速度为 ω_0，问转过多少角度时轮即停止转动？已知轮的半径为 R，质量为 m，可看作均质圆盘。轴的质量忽略不计，该压力 F 均匀分布在轮面上。

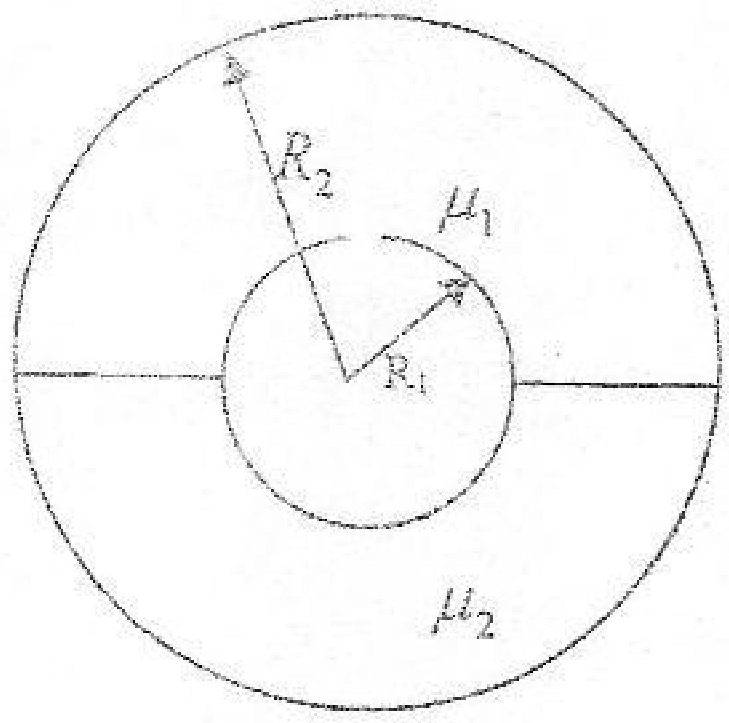


四、（20分）（1）当两种绝缘介质的交界面上没有自由电荷时，交界面两侧电力线与交界面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 满足 $\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$，式中 ε_{r1}、ε_{r2} 分别为两介质的相对介电常数。试证明上述结论。（2）当两种导电介质内部都有稳恒电流时，交界面两侧电力线与交界面法线的夹角 θ_1 和 θ_2 满足 $\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，式中 σ_1、σ_2 分别为两介质的电导率。试证明上述结论。（3）当导体（电导率 σ）与绝缘体（绝对介电常数 ε）接触时，交界面两侧电力线与法线的夹角又如何？

五、（15 分）如图所示，在圆柱形区域内，沿轴向有一均匀磁场 $\vec{B}$，$\frac{dB}{dt}$ 以恒定值增大。一个边长为 L 的正方形金属框置于该磁场中，框面垂直于轴线，框的一边 ad 与轴相交于中点 0。求各边及整个回路的感生电动势。



六、（20 分）一长直电缆由两个截面半径分别为 R_1 和 R_2 的共轴导体圆柱面组成。在两圆柱面之间填满磁导率为 μ_1 和 μ_2 的两种各向同性、均匀的磁介质，各占一半空间，且介质界面为通过电缆轴的平面，如图所示。设通过电缆的电流强度为 I，求介质中的磁场分布和在 $r=R_1$ 处介质—导体毗连面上的电流分布。



七、（20分）(1) 用玻尔理论证明：氢原子基态的轨道半径为玻尔半径 $a_0=\frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

(2) 氢原子的径向波函数为 $\psi = A\exp(-\frac{r}{a_0})$，式中 A 为常数，求 r 为何值时电子的几率密度为最大？最大几率密度为多少？

八、（20分）钾是 $z=19$ 的碱金属原子。问：

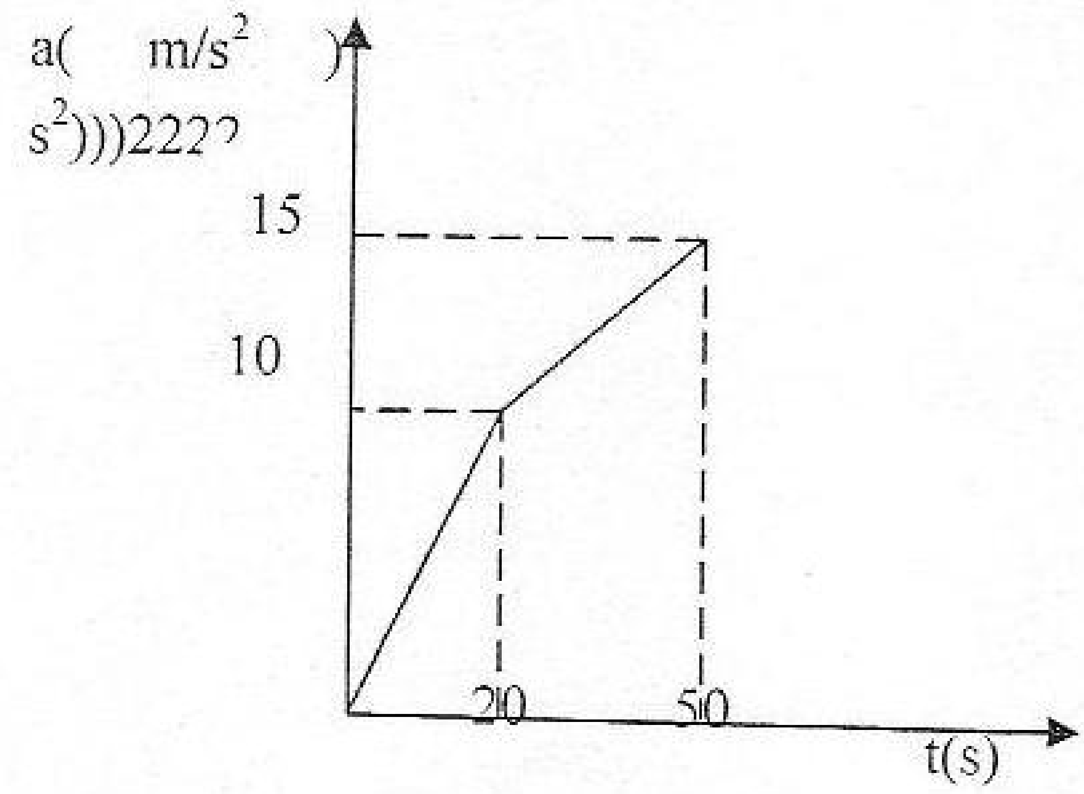
（1）钾基态的电子组态是什么？

（2）该态的量子数 L, S, J 各为多少？光谱项怎么写？

（3）其第一激发态光谱项如何写？电子组态是什么？

科目名称:	普通物理 A

一．　（15 分）火箭沿竖直方向由静止向上发射，加速度随时间的变化规律如图所示。



试求:（1）火箭在 t=50s 时燃料用完瞬间所能达到的高度;

（2）此时刻火箭的速度。

解：第一阶段：a 与 t 呈线性关系：

$$a=\alpha t+\beta$$

当 t=0 时，$a=0$，$\therefore\beta=0$；

当 t=20 时，$a=10$，$\therefore\alpha=1/2$。$\therefore a=\frac{1}{2}t$

$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}t$　$\therefore dv=\frac{1}{2}tdt$　两边积分得：$v=\frac{1}{4}t^2$

而 $v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}t^2$　$\therefore dx=\frac{1}{4}t^2dt$

$\int_0^x dx=\int_0^t\frac{1}{4}t^2dt\Rightarrow x=\frac{1}{12}t^3$

当 t=20 时，$x=\frac{2000}{3}m$。

第二阶段：$a=\alpha' t+\beta'$

当 t=20 时，$a=10$；当 t=50 时，$a=15\ \therefore\alpha'=\frac{1}{6}$，$\beta'=\frac{20}{3}$。$\therefore a=\frac{1}{6}t+\frac{20}{3}$

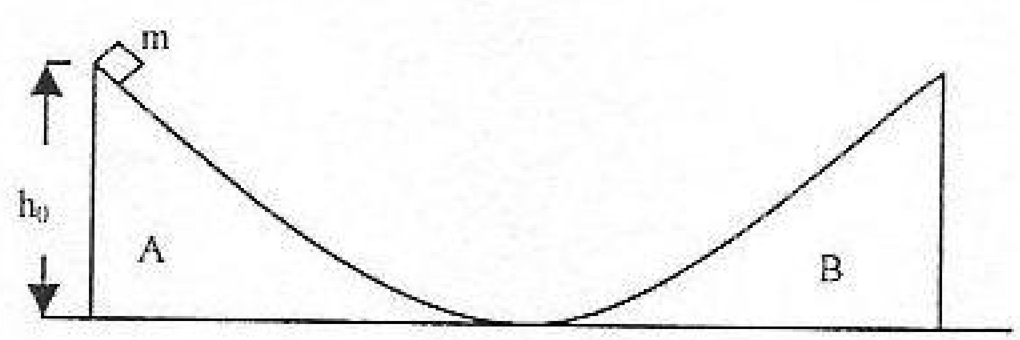
$dv=(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3})dt\Rightarrow\int_{100}^{v}dv=\int_{20}^{t}(\frac{1}{6}t+\frac{20}{3})dt\Rightarrow v=\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{2000}{3}$

在积分：

$\int_{\frac{2000}{3}}^{x}dx=\int_{20}^{t}(\frac{1}{12}t^2+\frac{20}{3}t-\frac{2000}{3})dt\Rightarrow x=\frac{1}{36}t^3+\frac{20}{6}t^2-66.6t+444.4$

当 $t=50s$ 时，$v=475m/s$，$x=h=8918.0m$

二．　两个形状完全相同，质量都为 M 的弧形导轨 A 和 B，放在地板上。今有一质量为 m 的小物块，由静止状态由 A 的顶端下滑，A 顶端的高度为 h_0。所有接触面均光滑，试求小物块在 B 轨上上升的最大高度（设 A、B 导轨与地面相切）。



解：设小物块沿A轨道下滑质地板时的速度为v，对小物块与A组成的系统，应用水平方向动量守恒和机械能守恒，求出物块的水平速度：

$$\begin{cases} -Mv_A + mv = 0 & (1) \\ mgh_0 = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv^2 & (2) \end{cases}$$

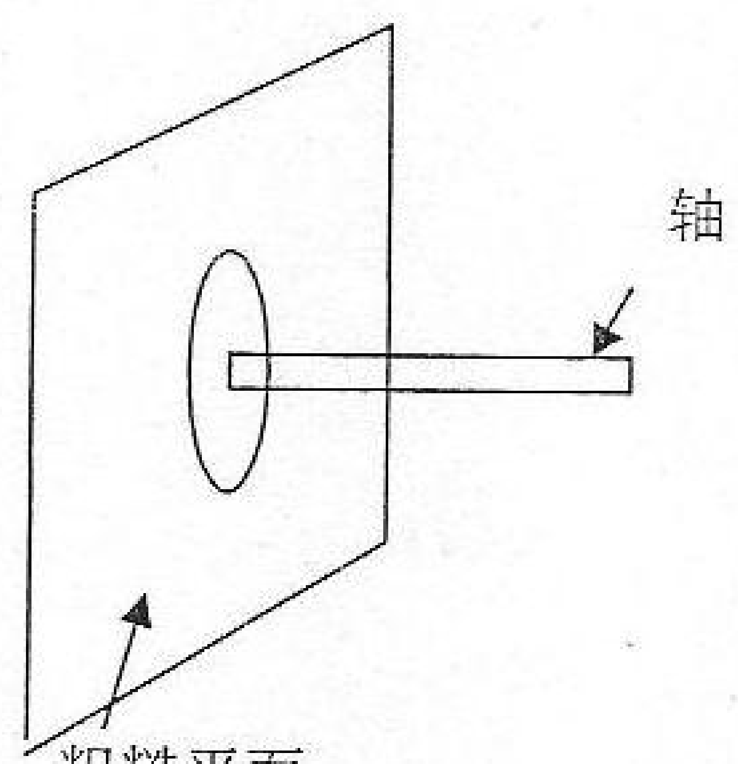
解得：$v = \sqrt{2Mgh_0/(M+m)}$

当小物块以初速度v沿B轨上升到最大高度H时，此时小物块相对B轨的速度为零。设小物块与B轨相对地沿水平发表方向的共同速度为u，据动量守恒和机械能守恒有：

$$\begin{cases} mv = (M+m)u & (3) \\ \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)u^2 + mgH & (4) \end{cases}$$

可解得：$H = \dfrac{Mv^2}{2(M+m)g} = (\dfrac{M}{M+m})^2 h_0$

三、　以力$\vec{F}$将一块粗糙平面紧压在轮上，平面与轮之间的滑动摩擦系数为μ，轮的初角速度为ϖ_0，问转过多少角度时轮即停止转动？已知轮的半径为R，质量为m，可看作均质圆盘。轴的质量忽略不计，该压力F均匀分布在轮面上。



解：盘面单位面积上的压力为：$\dfrac{F}{\pi R^2}$

以轮心为中心，以r为半径，取宽为dr的环，

则环上所受的压力为：$dF = \dfrac{F}{\pi R^2}2\pi r dr$

环上所受的摩擦力为：

$$df = \mu dF = \mu\frac{F}{\pi R^2}2\pi r dr = \mu\frac{2F}{R^2}r dr$$

df对轴的力矩：$d\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$　　$\vec{r}\perp\vec{F}$　　$\therefore dM = 2\mu\dfrac{F}{R^2}r^2 dr$

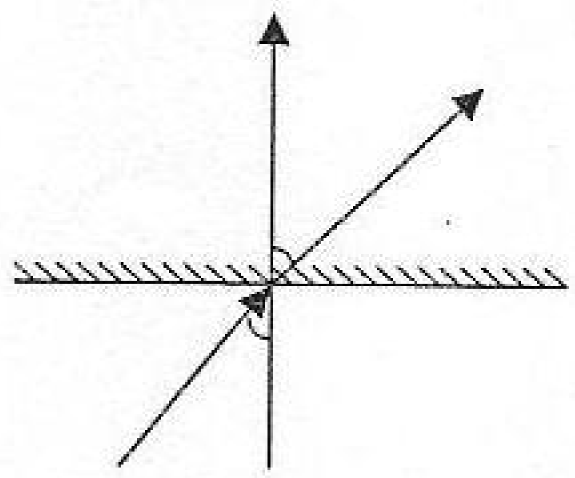
整个圆盘所受的摩擦力矩为：$M = \int_0^R 2\mu\dfrac{F}{R^2}r^2 dr = \dfrac{2}{3}\mu FR$

由动能定理：$-M\varphi = 0 - \dfrac{1}{2}I\varpi_0^2$

$$\therefore \varphi = \frac{3mR\varpi_0^2}{8\mu F}$$

四、（1）当两种绝缘介质的交界面上没有自由电荷时，交界面两侧电力线与交界面法线的夹角θ_1和θ_2满足$\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$，式中$\varepsilon_{r1}$、$\varepsilon_{r2}$分别为两介质的相对介电常数。试证明上述结论。（2）当两种导电介质内部都有稳恒电流时，交界面两侧电力线与交界面法线的夹角θ_1和θ_2满足$\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$，式中$\sigma_1$、$\sigma_2$分别为两介质的电导率。试证明上述结论。（3）当导体（电导率σ）与绝缘体（绝对介电常数ε）接触时，交界面两侧电力线与法线的夹角又如何？

解：（1）因为交界面上没有自由电荷，故边值关系为：



$$E_{1t}=E_{2t},\quad D_{1n}=D_{2n}$$

$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$，故：$\varepsilon_{r1}E_{1n}=\varepsilon_{r2}E_{2n}$，所以：

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}}=\frac{E_{2n}}{E_{1n}}=\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$

（2）在稳恒电流的情况下，由稳恒条件：$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=0$，在交界面上有：

$$j_{1n}=j_{2n}$$

由欧姆定律$\vec{j}=\sigma\vec{E}$可知：$\sigma_1E_{1n}=\sigma_2E_{2n}$，

又因为：$E_{1t}=E_{2t}$，故得：

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}}=\frac{E_{2n}}{E_{1n}}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

（3）分两种情况分析：

- 在静电情况下，导体内$\vec{E}_1=0$，故谈不上$\vec{E}_1$与法线的夹角；在介质一侧，由边值关系$E_{2t}=E_{1t}=0$，故电场强度$\vec{E}_2$垂直于交界面，即$\vec{E}_2$与法线的夹角为零。
- 在稳恒电流的情况下，设导体一侧的电流密度为$\vec{j}_1$，则因绝缘体中的电流密度$\vec{j}_2=0$，由稳恒条件$j_{1n}=j_{2n}=0$。由欧姆定律$\vec{j}_1=\sigma\vec{E}_1$，得：$E_{1n}=0$，故导体一侧$\vec{E}_1$与法线的夹角为90度；在绝缘体一侧，由边值关系：

$$E_{2t}=E_{1t}$$

$$D_{2n}-D_{1n}=D_{2n}=\varepsilon_2E_{2n}=\sigma_{e0}$$

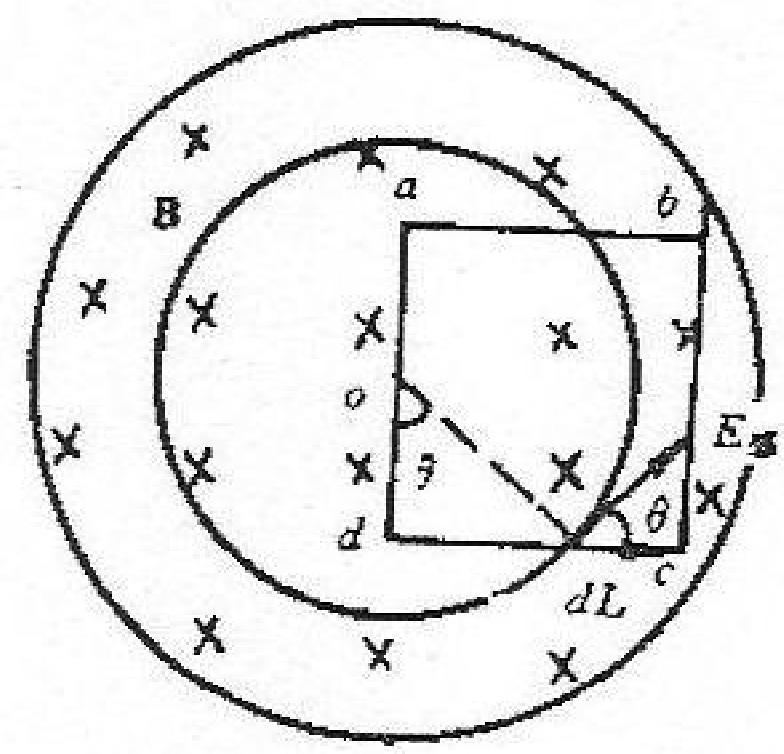
式中σ_{e0}为导体表面上的自由电荷面密度。所以：

$$tg\theta_2=\frac{E_{2t}}{E_{2n}}=\frac{E_{1t}}{\sigma_{e0}/\varepsilon_2}=\frac{\varepsilon_2}{\sigma_{e0}\sigma}j_1$$

五、在圆柱形区域内．沿轴向有一均匀磁场，如图所示，磁感应强度为 B，且$\frac{dB}{dt}$以恒定值增大。一个边长为 L 的正方形金属框置于该磁场中，框面垂直于轴线，轴线与框的一边 ad 相交于 ad 的中点 O。求各边及整个回路的感生电动势。

解：在本题中感生电动势的方向为逆时针。在圆柱形区域内，感生电场的大小为 $E_{感}=\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$。在 dc 边上取一线元$d\bar{l}$，$d\bar{l}$与$\bar{E}_{感}$的夹角为 θ 。由感生电动势的公式可知：

$\varepsilon_{dc}=\int_d^c \bar{E}_{感}\cdot d\bar{l}=\int_d^c E_{感}\cos\theta dl$，由题中几何关系可得：



$$\cos\theta=\frac{l/2}{r}=\frac{l}{2r}$$

$$\therefore \varepsilon_{dc}=\int_d^c \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\frac{l}{2r}dl=\frac{1}{4}\frac{dB}{dt}\int_d^c dl=\frac{l^2}{4}\frac{dB}{dt}>0$$

方向从$d\to c$。

对于 cb 段，用同样方法计算。此时$\cos\theta=\frac{l}{r}$，所以得到：　$\varepsilon_{cb}=\frac{l^2}{2}\frac{dB}{dt}>0$，方向从$c\to b$

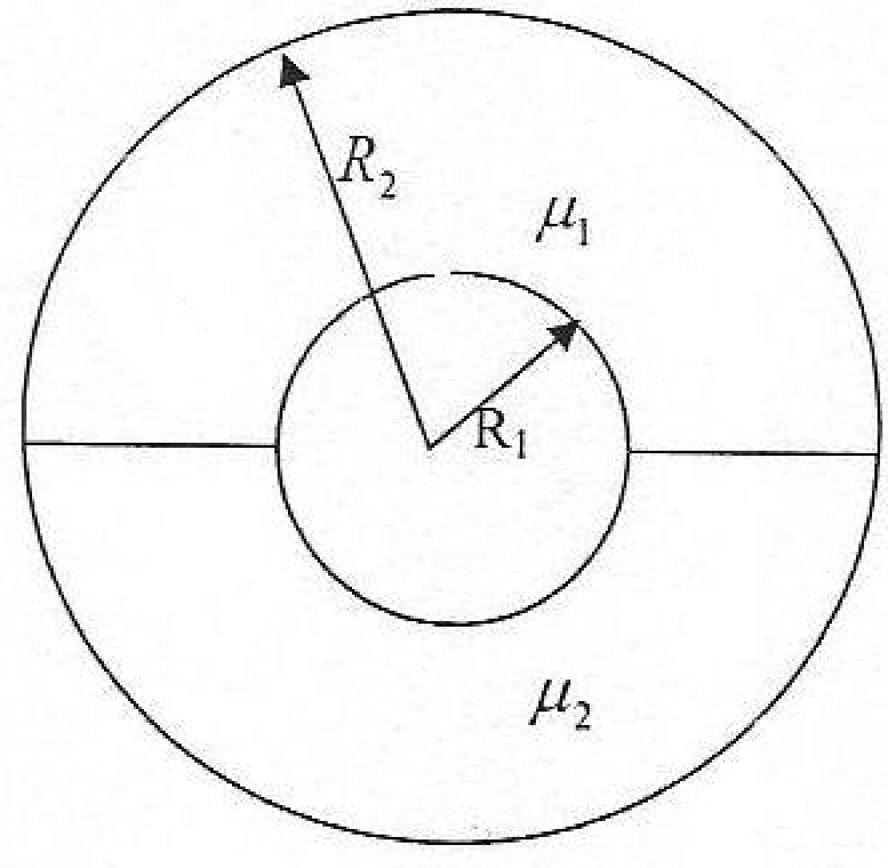
同理可得：$\varepsilon_{ba}=\frac{l^2}{4}\frac{dB}{dt}>0$，方向从$b\to a$

对于 ad 段，∵它是沿着径向的，$d\bar{l}$与$\bar{E}_{感}$的方向永相垂直，故$\varepsilon_{ad}=0$。

整个回路的感生电动势：

$$\varepsilon=\varepsilon_{dc}+\varepsilon_{cb}+\varepsilon_{ba}+\varepsilon_{ad}=l^2\frac{dB}{dt}$$

六、半径分别为R_1和R_2的两个共轴导体圆柱面组成一长直电缆，在两圆柱面之间填满磁导率为μ_1和μ_2的两种各向同性均匀磁介质，各占一半空间，且介质界面为通过电缆轴的平面，如图所示。设通过电缆的电流强度为I，求介质中的磁场分布和在$r=R_1$处介质—导体毗连面上的电流分布。



解：本题属于介质界面与磁力线垂直的情况。取半径为 r（$R_1 < r < R_2$）的圆回路作为安培环路，则：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}\cdot d\vec{l} = \frac{B}{\mu_1\mu_0}\pi r + \frac{B}{\mu_2\mu_0}\pi r = I$$

故：

$$B = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r},\quad \mathrm{H}_1 = \frac{B}{\mu_0\mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r},\quad H_2 = \frac{B}{\mu_0\mu_2} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

$$M_1 = \frac{B}{\mu_0} - H_1 = \frac{\mu_2(\mu_1-1)I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r},\quad M_2 = \frac{B}{\mu_0} - H_2 = \frac{\mu_1(\mu_2-1)I}{\pi(\mu_1+\mu_2)r}$$

对于$r < R_1$和$r > R_2$，恒有 $B = H = M = 0$。在$r = R_1$处的磁化面电流和传导面电流密度为：

$$i' = \begin{cases} M_1(R_1) = \dfrac{\mu_2(\mu_1-1)I}{\pi(\mu_1+\mu_2)R_1} & (介质1) \\ M_2(R_1) = \dfrac{\mu_1(\mu_2-1)I}{\pi(\mu_1+\mu_2)R_1} & (介质2) \end{cases}$$

$$i_0 = \begin{cases} H_1(R_1) = \dfrac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)R_1} & (介质1) \\ H_2(R_1) = \dfrac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1+\mu_2)R_1} & (介质2) \end{cases}$$

七、(1)用玻尔理论证明：氢原子基态的轨道半径为玻尔半径$a_0 = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

(2)氢原子的径向波函数为$\psi = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$，式中 A 为常数，求 r 为何值时电子的几率密度为最大？最大几率密度为多少？

解：（1）电子运动方程为：$\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$

按玻尔理论有：$mvr = n\hbar = n\dfrac{h}{2\pi}$ $\quad(n = 1,2,3,\cdots)$

由以上两式，得：$r = \dfrac{n^2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

对基态，n=1，$r = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$

（2）电子的几率密度为：

$$\rho = 4\pi r^2 \psi\psi^* = 4\pi|A|^2 r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

几率最大，有：$\dfrac{d\rho}{dr} = 4\pi|A|^2(2r - \dfrac{2r^2}{a_0})e^{-\frac{2r}{a_0}} = 0$

得：$r = a_0$

进一步验证可知：$\dfrac{d^2\rho}{dr^2} < 0$，故 $r = a_0$ 时 ρ 达到最大值。

$$\rho_{\max} = 4\pi|A|^2 a_0^2 e^{-2}$$

八、钾是 $z = 19$ 的碱金属原子。问：

（1）钾基态的电子组态是什么？

（2）该态的量子数 L, S, J 各为多少？光谱项怎么写？

（3）其第一激发态光谱项如何写？电子组态是什么？

解：（1）基态电子组态为：$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^1$

（2）由于钾原子内层（除价电子）电子与原子核组成了对称而稳定的原子实，其轨道角动量、自旋角动量与总角动量均为零。所以钾的量子数由价电子决定。基态价电子为 4s，故有：

$$L = 0,\ S = \frac{1}{2},\ J = \frac{1}{2}$$

光谱项为：${}^2S_{1/2}$

（3）钾原子的第一激发态为：3^2D，其价电子态为：3d，电子组态为：

$$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^1$$

计算知其相应的量子数为：L=2；S=1/2；J=3/2, 5/2。故考虑精细结构时其光谱项为：

${}^2D_{3/2}$，${}^2D_{5/2}$