

\* 说明: 全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上, 否则, 一律无效。

试题名称: 量子力学

1. (30 分) 一个质量为  $\mu$  的粒子被限制在一维区域  $-a \leq x \leq a$  运动,  $t=0$  时处于基态。今势阱突然向两边对称地扩展一倍, 即可以在  $-2a \leq x \leq 2a$  范围内运动。问

(a)  $t = t_0$  ( $> 0$ ) 时粒子处于新系统中基态的几率。

(b)  $t=t_0$  时, 粒子能量的平均值。

2. (20 分) 一维谐振子的哈密顿量为

$$H = \hat{p}^2 / 2\mu + \mu\omega^2 x^2 / 2 \quad (x \in (-\infty, \infty))$$

在坐标表象中, 它的能量本征态波函数为  $\psi_n(x) = N_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2 / 2}$ , 这里  $N_n$  是归一化系数,  $H_n$  为厄米多项式,  $\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$ 。试在动量表象中求出它的能量本征值和相应的波函数。

3. (30 分) 电子处于自旋  $\vec{S}$  在方向  $\vec{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$  上的投影  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  的本征态, 本征值为  $\hbar/2$ 。

(a) 求出相应的本征波函数;

(b) 若在上面的态中, 自旋的  $x$  分量和  $y$  分量有相等的均方差, 请求出方向角  $\theta, \phi$ 。

4. (30 分) 自旋  $1/2$  的粒子处于磁场  $\vec{B}$  中, 该粒子绕磁场进动的角频率记为  $\bar{\omega} = -\gamma \vec{B}$ 。设  $t=0$  时刻粒子处于自旋朝下状态  $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$ , 求  $t$  时刻粒子仍处于该状态的几率。

5. (20 分) 在谐振子的哈密顿量  $H_0 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2$  上加上  $x^3$  的微扰项  $H_1 = \lambda x^3$ , 求能量的二级修正。

6. (20 分) 有一量子力学体系, 哈密顿量  $H$  的本征值与本征矢分别为  $E_n$  与  $|n\rangle$ , 即  $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ 。设  $F$  为任一算符  $F = F(x, p)$ , 试证

$$\langle k | [F^\dagger, [H, F]] | k \rangle = \sum_n (E_n - E_k) (|\langle n | F | k \rangle|^2 + |\langle k | F | n \rangle|^2)$$



科目名称:

量子力学 434

1, 解

(a)

$t=0$ , 系统处于旧势的基态, 归一的波函数和能量本征值为

$$\psi(x,0) = \psi_1(x) = \sqrt{1/a} \cos[\pi x/2a], -a \leq x \leq a$$

$$E = E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 8\mu a^2$$

$t>0$  后, 势阱扩充, 新的定态能量本征态波函数和能量本征值分别为

$$\psi'_n(x) = \sqrt{1/2a} \sin[n\pi(x+2a)/4a],$$

$$E'_n = n^2 \pi^2 \hbar^2 / 32\mu a^2, n=1,2,3,\dots, -2a \leq x \leq 2a$$

新系统状态的一般波函数为

$$\psi'(x,t) = \sum_n c_n \psi'_n(x) e^{-iE'_n t/\hbar}$$

由波函数在  $t=0$  时的连续条件  $\psi'(x,0) = \psi(x,0)$

$$\text{可得 } c_n = (\psi'_n, \psi_1) = \int_{-a}^a dx \psi'_n(x)^* \psi_1(x)$$

于是知  $t=t_0 > 0$  时刻, 粒子处于新基态的几率为

$$P = |c_1 e^{-iE'_1 t_0/\hbar}|^2 = |c_1|^2$$

$$= \left| \int_{-a}^a dx \sqrt{1/2a} \cos[\pi x/4a] \sqrt{1/a} \cos[\pi x/2a] \right|^2$$

$$= 64/9\pi^2$$

(b) 系统能量平均值则和势阱未扩前一样, 为

$$\bar{E} = E_1 = \pi^2 \hbar^2 / 8\mu a^2.$$

2, 解

一维无限谐振子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \hat{x}^2$$

在坐标表象中,  $\hat{x} = x, \hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$

在动量表象中,  $\hat{p} = p, \hat{x}^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dp^2}$

这两个算符在两个表象中的关系是完全对称的, 考虑到哈密顿量里两个算符前面的系数, 只要作变换

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 \rightarrow \frac{1}{2\mu} p^2$$



或  $x \rightarrow p/\mu\omega$

就可以。于是知在动量表象中的能量本征波函数为

$$\varphi_n(p) = N'_n H_n(\alpha p / \mu\omega) e^{-\alpha^2 p^2 / 2\mu\omega}$$

$$= N'_n H_n(\beta p) e^{-\beta^2 p^2 / 2}$$

$$\beta = \alpha / \mu\omega = 1 / \sqrt{\mu\hbar\omega}$$

能量本征值与表象无关, 仍为

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega, n = 0, 1, 2, \dots$$

3, 解

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(a) \vec{S} \cdot \vec{n} \psi = \frac{\hbar}{2} \psi$$

令  $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , 由方程

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

可解得所求得归一化的波函数

$$\psi_+(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

(b), 在上面的态中,

$$\bar{S}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 = \frac{\hbar}{2} \psi_+^\dagger \sigma_1 \psi_+ = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos\phi$$

$$\bar{S}_y = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 = \frac{\hbar}{2} \psi_+^\dagger \sigma_2 \psi_+ = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin\phi$$

而

$$\langle S_x^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle \Delta S_x^2 \rangle = \langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2, \langle \Delta S_y^2 \rangle = \langle S_y^2 \rangle - \langle S_y \rangle^2$$



故由条件

$$\langle \Delta S_x^2 \rangle = \langle \Delta S_y^2 \rangle$$

得

$$\sin^2 \theta \cos^2 \phi = \sin^2 \theta \sin^2 \phi$$

由此解得最后结果:

$$\theta = 0 \text{ 或 } \pi, \phi \text{ 任意}$$

或者

$$\theta \neq 0 \text{ 或 } \pi, \phi = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4.$$

4, 解: 哈密顿量为  $H = \vec{\omega} \cdot \vec{S} = -\gamma \vec{B} \cdot \vec{S}$ , 这里  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$  是自旋算符, 时间演化算子为

$$U = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}\right), \text{ 在基矢 } |+\rangle, |-\rangle \text{ 上 } U \text{ 的矩阵表示为}$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} - i \frac{\omega_z}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} & -\frac{\omega_y - i \omega_x}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \\ \frac{\omega_y - i \omega_x}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} & \cos \frac{\omega t}{2} + i \frac{\omega_z}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix}, \text{ 这里 } \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \text{ 于是在 } t \text{ 时刻该}$$

粒子仍处于  $|-\rangle$  态的几率是  $P_{--}(t) = |\langle - | U | - \rangle|^2 = \left| \cos \frac{\omega t}{2} + i \frac{\omega_z}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} \right|^2$ .

5, 解:  $H = H_0 + H_1$ , 设  $|n\rangle$  为  $H_0$  的本征值为  $E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$  的本征态, 则能量的一、

二级修正分别为  $E_n^{(1)} = \langle n | H_1 | n \rangle$  及  $E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H_1 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$ .

由于  $\langle n | x | n+1 \rangle = \sqrt{\frac{n+1}{2\alpha}}$ ,  $\langle n | x | n-1 \rangle = \sqrt{\frac{n}{2\alpha}}$ , ( $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ ), 其他矩阵元为零,

$$\text{所以 } \langle n-3 | x^3 | n \rangle = \langle n | x^3 | n-3 \rangle = \frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{(2\alpha)^{3/2}},$$

$$\langle n-1 | x^3 | n \rangle = \langle n | x^3 | n-1 \rangle = \frac{3n^{3/2}}{(2\alpha)^{3/2}}, \text{ 其他矩阵元为零.}$$

由对称性有  $E_n^{(1)} = 0$ , 而

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &= \lambda^2 \left( \frac{|\langle n-3 | x^3 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-3}^{(0)}} + \frac{|\langle n-1 | x^3 | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n-1}^{(0)}} + \frac{|\langle n | x^3 | n+1 \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+1}^{(0)}} + \frac{|\langle n | x^3 | n+3 \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_{n+3}^{(0)}} \right) \\ &= -\frac{15}{4} \frac{\lambda^2 \hbar^2}{m^3 \omega^4} \left( n^2 + n + \frac{11}{30} \right). \end{aligned}$$



6, 解:  $[F^\dagger, [H, F]] = F^\dagger HF + FHF^\dagger - F^\dagger FH - HFF^\dagger$ , 而且  $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ ,

$$\text{于是 } \langle k | F^\dagger HF | k \rangle = \sum_n \langle k | F^\dagger H | n \rangle \langle n | F | k \rangle = \sum_n E_n |\langle n | F | k \rangle|^2,$$

$$\langle k | FHF^\dagger | k \rangle = \sum_n \langle k | F | n \rangle \langle n | HF^\dagger | k \rangle = \sum_n E_n |\langle k | F | n \rangle|^2,$$

$$\langle k | HFF^\dagger | k \rangle = E_k \sum_n \langle k | F | n \rangle \langle n | F^\dagger | k \rangle = E_k \sum_n |\langle k | F | n \rangle|^2,$$

$$\langle k | F^\dagger FH | k \rangle = E_k \sum_n \langle k | F^\dagger | n \rangle \langle n | F | k \rangle = E_k \sum_n |\langle n | F | k \rangle|^2,$$

所以

$$\langle k | [F^\dagger, [H, F]] | k \rangle = \sum_n (E_n - E_k) (|\langle n | F | k \rangle|^2 + |\langle k | F | n \rangle|^2).$$