2010年中国科学院高等代数考研试题（回忆版）

本试题由 kaoyan.com 网友 zhouheng1212 提供

第一题：1、设A是$n\times m$阶矩阵，B是$m\times n$阶矩阵，I_k是k阶矩阵，证明

$$\left|I_n+AB\right|=\left|I_m+BA\right|.(10分)$$

2、计算下列n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+x_1+a_1 & x_1+a_2 & x_1+a_3 & \cdots & x_1+a_n \\ x_2+a_1 & 1+x_2+a_2 & x_2+a_3 & \cdots & x_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n+a_1 & x_n+a_2 & x_n+a_3 & \cdots & 1+x_n+a_n \end{vmatrix}$$

（10分）

第二题：设A是3阶正交矩阵，且行列式为1，则A的特征多项式必为

$$f(\lambda)=\lambda^3-a\lambda^2+a\lambda-1,$$

其中a是实数，且$-1\leq a\leq 3$。（20分）

第三题：1、设A是n阶的可逆矩阵，B是n阶的幂零矩阵，且AB=BA,证明：A+B也是可逆矩阵。（12分）

2、条件$AB=BA$是否可以去掉，如果不可以，举例说明。（8分）

第四题:证明任意一n阶矩阵A的特征向量必是A^*的特征向量。（20分）

第五题：1、设一n阶复矩阵A=H+F,其中$\overline{H}^T=H$和$\overline{F}^T=-F$，且z=x+iy是A的任一特征值，又a,h,f分别是A,H,F中所有元素的模的最大值，证明:$|z|\leq na$, $|x|\leq nh$, $|y|\leq nf$.（10分）

2、证明任意Hermite矩阵的特征值都是实数。（5分）

3、证明任意反对称矩阵的特征值都是虚数。（5分）

第六题，设f是n维实线性空间的线性变换，证明f至少存在一维或二维不变子空间。（20分）

第七题：1、设C是n阶循环矩阵，

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-4} & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

计算C的特征值和特征向量。（10分）

2、计算C的行列式。（5分）

第八题：设$M(\mathbb{C})$是由复数域上的所有的n阶矩阵构成的线性空间，T是定义在$M(\mathbb{C})\mapsto\mathbb{C}$的线性空间，且对任意的$A$、$B\in M(\mathbb{C})$，有$T(AB)=T(BA)$。证明：存在$\lambda\in\mathbb{C}$，使得对任意$A\in M(\mathbb{C})$

$$T(A)=\lambda\, tr(A)$$

其中$tr(A)$是A的迹。（15分）

以上试题来自于 kaoyan.com 网友的回忆，仅供参考，纠错请发邮件至 suggest@kaoyan.com。