

合肥物质院

2010 年硕士学位研究生入学考试试题参考

答案

热力学与统计物理

(一) (每小题 15 分, 共 30 分) 一个绝热的、圆柱形的容器被一个可导热的活塞分为两部分, 两边各装有 1 摩尔单原子分子理想气体, 活塞可以无摩擦地自由滑动。开始两边压强相等, 温度分别为 T_0 和 $3T_0$; 最后, 系统达到了平衡态。

【1】 如果系统不对外做功, 求系统的总熵变;

【2】 如果热传导很缓慢, 可视为是可逆的, 则系统可以对外做多少功?

【 解 】 【 1 】 系 统 的 初 态 :

$$p_{1i} = p_{2i} = p_0; V_{1i} = \frac{RT_0}{p_0} = V_0, V_{2i} = \frac{3RT_0}{p_0} = 3V_0$$

系统达到平衡态后, 系统两部分的温度和压强分别彼此相等。由

$$\Delta U = C_V(T_f - T_0) + C_V(T_f - 3T_0) = 0$$

得到

$$T_{1f} = T_{2f} = T_f = 2T_0 \text{ 和 } p_{1f} = p_{2f} = p_0; V_{1f} = V_{2f} = 2V_0 \quad (1)$$

单原子分子理想气体的摩尔热容量 $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$, 由于初态和末态的压强相等, 用等压过程把它们连接起来, 可得到系统的总熵变

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C_p \int_{T_0}^{2T_0} \frac{dT}{T} + C_p \int_{3T_0}^{2T_0} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{4}{3} = \frac{5}{2}R \ln \frac{4}{3} \quad (2)$$

【2】 对于可逆绝热过程, 系统的总熵变 $\Delta S = 0$, 末态两部分的温度和体积分别相等, $T_{1f} = T_{2f} = T_f$, $V_{1f} = V_{2f} = 2V_0$, 由此得

式中 L 为汽化热, v 和 v_w 分别为水蒸气 and 水的比容。由于 $v \gg v_w$,

v_w 可以忽略; 把大气当作理想气体, 将 $v = \frac{RT}{p}$ 代入, 得

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Lp}{RT^2} \quad (4)$$

或

$$\Delta T = \frac{RT^2}{L} \frac{\Delta p}{p} = -\frac{8.3 \times 373^2}{9720 \times 4.18} \times 0.037 = -1.05 K$$

(5)

所以, 海拔 $300m$ 处水的沸点为

$$t = 100 + \Delta T = 99^\circ C \quad (6)$$

(三) (每小题 10 分, 共 30 分) 一物体有 N 个粒子。每个粒子有两个能级, 其能量与简并度分别为 ε_1, g_1 和 ε_2, g_2 ;

并且 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, g_2 > g_1$ 。试按照玻尔兹曼分布, 求:

【1】物体的内能 $U(T)$;

【2】物体的热容量 $C(T)$;

【3】物体的熵 $S(T)$; 并分别讨论该物体在 $T \rightarrow 0K$ 和 $T \rightarrow \infty$ 两种极限情形下的熵; 如果两个能级都是非简并能级, 即 $g_1 = g_2 = 1$, 结果又如何?

【解】 物体有 N 个粒子, 每个粒子有两个能级。按照玻尔兹曼分布, 如果 ε_i 和 g_i 分别为单粒子能级 i 的能量和简并度, 则单粒子配分函数 z 为

$$z = g_1 \exp(-\beta\varepsilon_1) + g_2 \exp(-\beta\varepsilon_2)$$

(1)

式中, $\beta = 1/kT$, T 为物体的温度, k 为玻尔兹曼常数。

【1】由式 (1), 物体的内能为

$$U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z$$

$$= \frac{N}{z} [g_1 \varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + g_2 \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)]$$

(2)

【2】物体的热容量 $C = dU/dT = -\beta^2 k dU/d\beta$ 。利用式 (2), 我们可得

$$C = \frac{N\beta^2 k}{z} \left\{ g_1 \varepsilon_1^2 \exp(-\beta \varepsilon_1) + g_2 \varepsilon_2^2 \exp(-\beta \varepsilon_2) - \frac{[g_1 \varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + g_2 \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)]^2}{z} \right\}$$

(3)

【3】由式 (1), 物体的熵 S 为

$$S = Nk \left(\ln z - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \right)$$

$$= Nk \left\{ -\beta \varepsilon_1 + \ln[g_1 + g_2 \exp(-\beta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))] + \frac{\beta[g_1 \varepsilon_1 + g_2 \varepsilon_2 \exp(-\beta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))]}{g_1 + g_2 \exp[-\beta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]} \right\}$$

(4)

因为 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, 我们由式 (4) 可得

$$S(T \rightarrow 0K) = Nk \ln g_1$$

(5)

$$S(T \rightarrow \infty) = Nk \ln(g_1 + g_2)$$

(6)

如果两个能级都是非简并能级, 即 $g_1 = g_2 = 1$, 则式 (5) 和 (6) 分别化为

$$S(T \rightarrow 0K) = 0$$

(7)

$$S(T \rightarrow \infty) = Nk \ln 2$$

(8)

(四) (每小题 10 分, 共 30 分) 一个玻尔兹曼体系由 N 个近独立的粒子构成。每个粒子的能量只能取两个值 $\varepsilon_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$, 并且这两个能级都是非简并能级。在能级 ε_1 和 ε_2 上的粒子数分别为 N_1 和 N_2 。且 $N, N_1, N_2 \gg 1$,

【1】求体系的熵 S ;

【2】求体系温度 T 与体系能量 E 的函数关系, 当 N_1 取什么值时, $T < 0K$?

【3】当负温度体系与正温度体系接触时, 热流的方向是什么? 为什么?

【解】

【1】体系的熵。因为两个能级都是非简并能级, 对任一给定的分布: $\{\varepsilon_1, N_1; \varepsilon_2, N_2\}$, 如果满足条件

$$N_1 + N_2 = N$$

(1)

$$N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 = N_2 \varepsilon = E$$

(2)

则玻尔兹曼体系的状态数为

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

(3)

因 $N, N_1, N_2 \gg 1$, 可以利用 Stirling 近似: $\ln x! = x(\ln x - 1)$ 。

利用式 (3), 由熵的玻尔兹曼公式 $S = k \ln W$, 可得体系的熵为

$$S = k[N \ln N - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2]$$

(4)

由式 (1) 和式 (2), 有 $N_1 = N - E/\varepsilon$, $N_2 = E/\varepsilon$ 。这样, 我们可把式 (4) 改写为

$$S = k \left[N \ln N - \left(N - \frac{E}{\varepsilon} \right) \ln \left(N - \frac{E}{\varepsilon} \right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right]$$

(5)

【2】体系具有负温度的条件。令 T 和 U 分别为体系的温度与内能。按热力学理论, 我们有

$$T^{-1} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N$$

(6)

在式 (5) 中, 取 $E = \bar{E} = U$ 后, 把式 (5) 代入式 (6), 我们得到

$$T = \frac{\varepsilon}{k \ln(N\varepsilon/U - 1)} = \frac{\varepsilon}{k \ln(N_1/N_2)}$$

(7)

由式 (7), 当高能级的粒子数 N_2 比低能级的粒子数 N_1 多时,

或当 $N_1 = N - N_2 < N/2$ 或 $N_2 = N - N_1 > N/2$ 时, $T < 0K$, 即体系具有负温度。

【3】热流方向。按熵增加原理, 当一个孤立体系趋向热平衡时, 体系的熵不减少。假定体系 1 的温度为负, $T_1 < 0K$; 体系 2 的温度为正, $T_2 > 0K$ 。如果热能从体系 2 流向体系 1, 即

$Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $|Q_2| = Q_1$, 则两个体系总的熵增加量

$\Delta S = Q_1/T_1 + Q_2/T_2 < 0$ 。这不可能是真的。显然, 如果热能从体系 1 流向体系 2, 则 $\Delta S > 0$ 。这是允许的。因此, 热能必定是从负温度体系流向正温度体系。这意味着负温度体系的温度更“高”, 它具有更多能量。

(五) (30 分) 铁磁体中的自旋波可等效地看作某种准粒子, 服从玻色分布。若准粒子的能量与动量的关系为

$$\varepsilon = Ap^2$$

式中 A 为常数, p 为准粒子的动量大小。试求在低温范围内铁磁体的热容量 C_v 与温度 T 的关系。

【解】已知准粒子遵守玻色分布, 且粒子数不恒定, $\alpha = 0$, 因此系统的内能为

$$E = \frac{V}{h^3} \int \frac{\varepsilon(p)}{e^{\varepsilon(p)/kT} - 1} dp_x dp_y dp_z = \frac{4\pi V}{h^3} \int \frac{Ap^4}{e^{Ap^2/kT} - 1} dp \quad (1)$$

作变量代换, 令 $y = Ap^2/kT$, 则有

$$E = \frac{4\pi VA}{h^3} \frac{1}{2} \left(\frac{kT}{A} \right)^{5/2} \int_0^\infty \frac{y^{3/2}}{e^y - 1} dy = \eta T^{5/2}$$

(2)

式中 η 是与 T 无关的常数, 所以

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = \frac{5}{2} \eta T^{3/2} \propto T^{3/2}$$

(3)

合肥物质院

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

热力学与统计物理

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效；可使用计算器。

(一) (每小题 15 分, 共 30 分) 一个绝热的圆柱形容器被一个可导热的活塞分为两部分, 两边各装有 1 摩尔单原子分子理想气体, 活塞可以无摩擦地自由滑动。开始两边压强相等, 温度分别为 T_0 和 $3T_0$; 最后, 系统达到了平衡态。

【1】 如果系统不对外做功, 求系统的总熵变;

【2】 如果热传导很缓慢, 过程可视为是可逆的, 则系统可以对外做多少功?

(二) (30 分) 设海平面上的大气处于标准状况, 试用等温大气模型, 求在海拔 300 米处的大气的压强和水的沸点。给出计算的步骤和所做的近似。

已知: 气体常数 $R = 8.3 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$, 重力加速度 $g = 9.8 m \cdot s^{-2}$, 大气和水的摩尔分子量分别为 $\mu_1 = 29 \times 10^{-3} kg \cdot mol^{-1}$ 和 $\mu_2 = 18 \times 10^{-3} kg \cdot mol^{-1}$, 水的摩尔汽化热 $L = 9.72 \times 10^3 cal \cdot mol^{-1}$ 。

(三) (每小题 10 分, 共 30 分) 一物体有 N 个粒子。每个粒子有两个能级, 其能量与简并度分别为 ε_1, g_1 和 ε_2, g_2 ; 并且 $\varepsilon_2 > \varepsilon_1, g_2 > g_1$ 。试按照玻尔兹曼分布, 求:

【1】 物体的内能 $U(T)$;

【2】 物体的热容量 $C(T)$;

【3】 物体的熵 $S(T)$; 并分别讨论该物体在 $T \rightarrow 0K$ 和

$T \rightarrow \infty$ 两种极限情形下的熵；如果两个能级都是非简并能级，即 $g_1 = g_2 = 1$ ，结果又如何？

(四) (每小题 10 分，共 30 分) 一个玻尔兹曼体系由 N 个近独立的粒子构成。每个粒子的能量只能取两个值 $\varepsilon_1 = 0$ 和 $\varepsilon_2 = \varepsilon > 0$ ，并且这两个能级都是非简并能级。在能级 ε_1 和 ε_2 上的粒子数分别为 N_1 和 N_2 ，且 $N, N_1, N_2 \gg 1$ ，

【1】求体系的熵 S ；

【2】求体系温度 T 与体系能量 E 的函数关系；当 N_1 取什么值时， $T < 0K$ ；

【3】当负温度体系与正温度体系接触时，热流的方向是什么？为什么？

(五) (30 分) 在低温下，铁磁体中的自旋波可等效地看作某种准粒子，服从玻色分布。若准粒子的能量与动量的关系为

$$\varepsilon = Ap^2$$

式中 A 为常数， p 为准粒子的动量大小。试求铁磁体的热容量 C_v 与温度 T 的关系。