2010 年硕士学位研究生入学考试参考答案

（高等数学A）

一、 选择题（每小题5分，共25分）

(1) D (2) A (3) B (4) C (5) D

二、 填空题（每小题5分，共25分）

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{\pi^2}{2}$ (3) $\frac{5\pi}{2}$ (4) 6π

(5) $(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}[(z-y)\mathbf{i}+(x-z)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}]$

三、 (8分) 对 x 求导，得 $\begin{cases} y' = f'_x + f'_z z' \\ e^z z' = y' z + z' y \end{cases}$ ....(4分)

解得 $y' = \dfrac{(e^z-y)f'_x}{e^z - z f'_z - y}$, $z' = \dfrac{z f'_x}{e^z - z f'_z - y}$. ....(8分)

四、 (8分) (1) 解微分方程得 $f(x) = e^x + 1$. ....(4分)

(2) 原式 $= \int e^x \ln(e^x+1)\mathrm{d}x = (e^x+1)\ln(e^x+1) - e^x + C$. ....(8分)

五、 (8分) (1) 收敛半径=1. ....(3分)

(2) 当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$. 积分得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^n \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(1+x).$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

....(8分)

六、 (8分) 对应的齐次方程的通解为 $(C_1+C_2x)e^{-x}$....................(4分)

设非齐次方程的一个特解为 ax^2e^{-x}，代入原方程解得 $a=\frac{1}{2}$. 所以原方程的通解为 $(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. ....(8分)

七、 (12分) (1) 利用分部积分知

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x = \int_0^1(2x-1)f'(x)\mathrm{d}x = f(0)+f(1)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

....(6分)

(2) 当 $f(0)=1,\ f(1)=-1$ 时，

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{M}{12}.$$

……………………………………………………………………(12分)

八、 (12分)

$$\int_L e^x\sin y\mathrm{d}x + e^x\cos y\mathrm{d}y = \int_L d(e^x\sin y) = e^x\sin y\Big|_{(0,0)}^{(2,0)} = 0.$$

……………………………………………………………………(6分)

$$\int_L -y\mathrm{d}x = \int_\pi^0 -\sin\theta\mathrm{d}(1+\cos\theta) = -\int_0^\pi \sin^2\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}.$$

所以，所求的积分等于 $-\frac{\pi}{2}$. ……………………………………(12分)

九、 (12分) 设 Σ 为 $x^2+y^2\le 1,\ z=1$，方向朝下. S 和 Σ 围成的区域记为 V. 由Gauss定理知

$\iint_{S+\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iiint_V 3x^2\mathrm{d}V$ ……………………(4分)

$\iiint_V 3x^2\mathrm{d}V = \int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r$

$=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………………………………(8分)

而 $\iint_\Sigma(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$. 所以所求积分 $= -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$. ……………………………………………………………(12分)

十、 (12分) (1) $f(x)$ 为偶函数，$f(x)$ 可展开成余弦级数.

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)\mathrm{d}x = 2-\frac{2\pi^2}{3}$. ……………………………(2分)

$a_n = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}.$

所以 $1-x^2 = (1-\frac{\pi^2}{3}) + \sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\le x\le\pi)$. …..(8分)

上式中，令 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. ……………………(10分)

由Parseval等式知：$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^\infty a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi(1-x^2)^2\mathrm{d}x$，解得 $\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.(12分)

十一、 (10分) 由于 $f'(x) \geq 0$ 及 $f(0)=0$，所以 $f(x) \geq 0, (x \geq 0)$. ...... (2分)
设 $g(x)=e^{-x}f(x)$，则 $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x)) \leq 0$，$g(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的减函数. .... (6分)
由于 $g(0)=0$, 故 $g(x) \leq 0$. 由 $f(x) \geq 0$ 知 $g(x) \geq 0$, 因此 $g(x) \equiv 0$, 即 $f(x) \equiv 0$. .... (10分)

十二、 (10分) 由于 $f(x)$ 一致连续，存在 $\delta > 0$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)| < 1$. .... (2分)
取 $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, 使得 $|a_{i+1}-a_i| < \delta$, $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$. 令 $M = \max\{|f(a_1)|, |f(a_2)|, \cdots, |f(a_{n-1})|\}$. 对任意 $x \in (0,1)$, 存在 $1 \leq i \leq n-1$, 使得 $|x - a_i| < \delta$, 所以 $|f(x)-f(a_i)| < 1$. 从而 $|f(x)| < |f(a_i)|+1 \leq M+1$. 所以 $f(x)$ 为有界函数. .... (8分)
取 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}\,(0 < x < 1)$, 则 $f(x)$ 有界，但非一致连续. .... (10分)

2010年硕士学位研究生入学考试试题

（高等数学A）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效，不使用计算器

一、 选择题 (每题只有一个答案是正确的，每小题5分，共25分)

(1) 当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是 (　　).

A. 无穷小量　　　　B. 无穷大量

C. 有界且非无穷小量　　　　D. 无界且非无穷大量

(2) 设 $f(x)$ 可微且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{2x}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 (　　).

A. -2　　B. 2　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

(3) 二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微的 (　　).

A. 充分条件　　　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既非充分也非必要条件

(4) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分条件是 (　　).

A. $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\ (n\in\mathbf{N})$　　　　B. $\sqrt[n]{a_n}<1\ (n\in\mathbf{N})$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛　　　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛

(5) 下列广义积分中发散的是 (　　).

A. $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$　　　　B. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

C. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x(x^2-1)}\mathrm{d}x$　　　　D. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}\mathrm{d}x$

二、 填空题 (每小题5分，共25分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^2-\sin^2 x}=$ ________.

(2) 曲线 $y=\sin x\,(0\le x\le\pi)$ 和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积是 ________.

(3) 二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{2\sin x+3\sin y}{\sin x+\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(4) 平面 $x+2y+z=1$ 与椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 相交所成的椭圆的面积为 ________.

(5) 向量场 $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的 旋度为 ________.

三、 (8分) 设二元函数 f 具有一阶连续偏导数，关系式 $\begin{cases} y=f(x,z) \\ e^z=yz \end{cases}$ 可确定函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

四、 (8分) 设$f(x)$ 满足条件 $f'(x)=f(x)-1$, $f(0)=2$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求不定积分 $\displaystyle\int(f(x)-1)\ln f(x)\mathrm{d}x$.

五、 (8分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径及和函数.

六、 (8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}$ 的通解.

七、 (12分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中有二阶连续导函数.

(1) 证明: $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=f(0)+f(1)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

(2) 当 $f(0)=1, f(1)=-1$ 且 $|f''(x)|\le M$ 时，试证: $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\dfrac{M}{12}$.

八、 (12分) 计算曲线积分 $\displaystyle\int_L(e^x\sin y-y)\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y$，其中 L 是以 $(0,0)$ 为起点，以 $(2,0)$ 终点的上半圆周 $(x-1)^2+y^2=1$.

九、 (12分) 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是有向曲面 $z=x^2+y^2\,(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正方向夹角为锐角.

十、 (12分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，当 $0\le x\le\pi$ 时，$f(x)=1-x^2$.

(1) 将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数;

(2) 根据 (1) 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

十一、 (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，$0\le f'(x)\le f(x)$，证明 $f(x)$ 恒等于 0.

十二、 (10分) 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致连续，证明 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界. 举例说明逆命题不成立.