合物

中国科学技术大学

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（概率论与数理统计）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

可以使用带统计功能的计算机

一、（10 分）

记 $X=(X_1,X_2,X_3)'$ ，$Y=(Y_1,Y_2,Y_3)'$，

$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ ，$b=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，设 $Y=AX+b$，X 的联合密度为 $f(x_1,x_2,x_3)$，求随机向量 Y 的联合密度函数。

解：由 $Y=AX+b$ 得 $X=A^{-1}(Y-b)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1/2&1&-1\\-1/2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1-2\\Y_2-1\\Y_3-3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-Y_2+Y_3-2\\ \frac{1}{2}Y_1+Y_2-Y_3+1\\ -\frac{1}{2}Y_1+Y_3-2\end{pmatrix}$$

$\det(A)=2$，所以随机向量 Y 的联合密度函数为

$$f(-y_2+y_3-2,0.5y_1+y_2-y_3+1,-0.5y_1+y_3-2)/2$$

二、（10 分）

设 $(X,Y,Z)'$ 服从三元正态分布，其中 $EX=-1,EY=-2,EZ=3$, $Var(X)=Var(Y)=Var(Z)=9$, $\rho_{XY}=0.5,\rho_{XZ}=-1$ ，W 与 $(X,Y,Z)'$ 独立，$W\sim N(3,16)$，求 $P(3X+2Y+5Z-2W>0)$（用标准正态分布函数表达）。

解：$E(3X+2Y+5Z)=-3+(-4)+15=8$,

求(Z,W)的分布，并指出它们是独立的。

解：

$$P(Z \le z, W=0) = P(X \le z, X < Y) = \iint_{\substack{x<y \\ x\le z}} \lambda\mu \exp\{-(\lambda x + \mu y)\} dxdy$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-\exp\{-(\lambda+\mu)z\})$$

同理，

$$P(Z \le z, W=1) = P(X \le z, Y \le X) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1-\exp\{-(\lambda+\mu)z\})$$

$$P(W=0) = P(X<Y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, P(W=1) = P(Y \le X) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

所以

$$P(Z \le z \mid W=0) = 1-\exp\{-(\lambda+\mu)z\},$$
$$P(Z \le z \mid W=1) = 1-\exp\{-(\lambda+\mu)z\}$$

所以Z和W相互独立。

六、(共 15 分)

设$Y=(Y_1,Y_2)', X=(X_1,X_2,\cdots,X_p)'$, X的$p\times p$协方差矩阵为Σ_{11}，Y和X的$2\times p$协方差矩阵为Σ_{21}，$EX=\mu, EY=\eta$，一般随机向量Y无法观测到，我们用随机向量X的线性函数$\varphi(X)$来估计Y，其中

$$\varphi = (\varphi_1(X), \varphi_2(X))', \varphi_i(x) = a_{i0} + a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ip}X_p, i=1,2。$$

在$E\|Y-\varphi(X)\|^2 = \min$的准则下，

（1） （9 分）求随机向量$\varphi(X)$，

（2） （6 分）求$E\|Y-\varphi(X)\|^2$.（设$Var(Y)=\Sigma_{22}$）

解：设$\varphi_i(X) = a_{i0} + a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ip}X_p$，$i=1,2$，则$\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)'$是随机向量$Y$在$1, X_1, \cdots, X_p$上的线性投影，即

$$\varphi(X) = \eta + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X-\mu),$$

$$
\begin{aligned}
E\|Y-\varphi(X)\|^2 &= E(Y-\eta-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X-\mu))'(Y-\eta-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X-\mu)) \\
&= E(Y-\eta)'(Y-\eta)+E(X-\mu)'\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X-\mu)-2E(Y-\eta)'\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X-\mu) \\
&= tr(\Sigma_{22}-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})
\end{aligned}
$$

七、（15 分） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid. ~ $N(\mu,1), \mu\in(-\infty,\infty)$，求 μ, μ^2, μ^3 的 $UMVU$ 估计。

解：μ, μ^2, μ^3 的 $UMVU$ 估计分别为 $\overline{X}, \overline{X}^2-1/n, \overline{X}^3-3\overline{X}/n$。首先证明 $\overline{X}$ 为完全充分统计量，然后利用 $\overline{X}=Y+\mu$，其中 $Y\sim N(1,1/n)$。为了求 μ^3 的依赖于 $\overline{X}$ 的无偏估计，只需要找常数 a,b,c,d，使得 $E(a\overline{X}^3+bX'^2+c\overline{X}+d)=\mu^3$。

八、（15 分）设 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是总体 F 的一个样本量为 n 的样本，总体的密度函数为 $f_\theta(x)=a(\theta)h(x)I_{(\theta_1,\theta_2)}(x)$，这儿 $h(x)\ge 0, \int_{-\infty}^{\infty}h(x)dx=1, \theta=(\theta_1,\theta_2)$，$-\infty<\theta_1\le\theta_2<\infty$，且 $a(\theta)=(\int_{\theta_1}^{\theta_2}h(x)dx)^{-1}$，求关于该问题的二维充分统计量。

解：样本联合密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots x_n;\theta) &= a^n(\theta)\prod_{i=1}^{n}h(x_i)I(\theta_1\le x_i\le\theta_2) \\
&= a^n(\theta)\prod_{i=1}^{n}h(x_i)I(\min x_i\ge\theta_1)I(\max x_i\le\theta_2)
\end{aligned}
$$

由因子分解定理，$(\min x_i, \max x_i)$ 为 (θ_1,θ_2) 的充分统计量。

九、（共 20 分） 下面的分布族哪一个是指数族？

（1）（4 分） $(0,\theta)$ 上的均匀分布族，

（2）（4 分） $p(x,\theta)=\{\exp[-2\log\theta+\log(2x)]\}I_{(0,\theta)}(x)$，

（3）（3 分） $p(x,\theta)=1/9, x\in\{0.1+\theta, 0.2+\theta,\cdots,0.9+\theta\}$，

（4）（3 分） $N(\theta,\theta^2), \theta>0$，

（5）（3 分） $p(x,\theta)=2(x+\theta)/(1+2\theta), 1<x<1, \theta>0$，

（6）（3 分） $p(x,\theta)$ 是二项分布 $B(n,\theta)$ 变量 X 关于 $X>0$ 的条件频率函数。

解：（1） $f(x,\theta)=\exp\{-\log\theta\}I_A(x)$，其中 $A=(0\le x\le\theta)$ 与参数 θ 有关，所以不

是指数族。

（2）$f(x,\theta)=\exp\{-2\log\theta+\log(2x)\}I_A(x),\ A=(0,\theta)$ 与参数 θ 有关，所以不是指数族。

（3）$f(x,\theta)=\frac{1}{9}I_A(x),\ A=\{0.1+\theta,0.2+\theta,\cdots,0.9+\theta\}$ 与参数 θ 有关，所以不是指数族。

（4）$f(x,\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta}\exp\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\theta^2}\}=\exp\{-\frac{x^2}{2\theta^2}+\frac{x}{\theta}-\frac{1}{2}-\log(\sqrt{2\pi}\theta)\}$，指数部分不具有指数族的形式，所以不是指数族。

（5）$f(x;\theta)=\frac{2(x+\theta)}{1+2\theta}I_{(0,1)}(x)=\exp\{\log(x+\theta)=\log 2-\log(1+2\theta)\}I_{(0,1)}(x)$，指数部分不具有指数族的形式，所以不是指数族。

（6）

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-(1-\theta)^n,$$

$$P(X=k,X>0)=P(X=k)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k},\ k=1,2,\cdots,n$$

$$P(X=k\mid X>0)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}/[1-(1-\theta)^n],\ k=1,2,\cdots,n,$$

注意到

$$P(X=k\mid X>0)=\exp\{k\log\frac{\theta}{1-\theta}+n\log(1-\theta)-\log[1-(1-\theta)^n]+\log\binom{n}{k}\}I_A(k),$$

这儿 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 与参数 θ 无关，指数部分具有指数族的形式，所以是指数族。

十、（共 20 分），设 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 独立同分布，其公共分布是 $(0,\theta)$ 上的均匀分布。设 $M_n=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，并设 $\delta_c(X)=I(M_n>c)$，

（1）（8 分）求 δ_c 的功效函数，并证明它是 θ 的单调函数，

（2）（6 分）在 $H_0:\theta\le 1/2\leftrightarrow H_1:\theta>1/2$ 的检验中，选择什么样的 c 能使 δ_c 的水平恰为 0.05?

（3）（6 分）n 应多大才能使（2）中的 δ_c 有功效 0.98?

解：（1）检验 δ_c 的功效函数 $(c>0)$ 为

$$\beta(\theta,\delta_c(X))=P_\theta(\delta_c(X)=1)=P_\theta(M_n>c)=1-P_\theta(X_1\le c,\cdots,X_n\le c)$$
$$=\begin{cases}0, & \theta\le c\\ 1-(\frac{c}{\theta})^n, & \theta>c\end{cases}$$

当$\theta>c$时，$\beta(\theta,\delta_c(X))=1-c^n\theta^{-n}$, $\frac{\partial\beta}{\partial\theta}=nc^n\theta^{-n-1}>0$，所以是单调增函数。

（2）对 $H_0:\theta\le 0.5\leftrightarrow H_1:\theta>0.5$，由（1）知$\delta_c(X)$的功效函数关于$\theta$严格增，故只要$\beta(0.5,\delta_c(X))=0.05$ 就有对任意的$\theta\le 0.5$，$\beta(\theta,\delta_c(X))\le 0.05$成立，从而 0.05 是$\delta_c(X)$的真实水平，而

$$\beta(0.5,\delta_c(X))=1-(2c)^n=0.05\Rightarrow\quad c=0.5\cdot(0.95)^{1/n},$$

（3） 对（2）中的$\delta_c(X)$，当$\theta>0.5$时，功效函数为

$$\beta(\theta,\delta_c(X))=1-(\frac{c}{\theta})^n=1-[0.5\cdot(0.95)^{1/n}/\theta]^n=1-\frac{0.95}{(2\theta)^n}=0.98,$$

因此 $n=[\log\frac{0.95}{0.02}/\log(2\theta)]$, 代入$\theta=0.75$, 得$n=[\frac{\log 95-\log 2}{\log 3-\log 2}]$, 这儿[]表示整数部分。

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（概率论与数理统计）

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

可以使用带统计功能的计算器

一、（10 分）

记 $X=(X_1,X_2,X_3)'$ ，$Y=(Y_1,Y_2,Y_3)'$，

$A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ ，$b=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，设 $Y=AX+b$， X 的联合密度为 $f(x_1,x_2,x_3)$，求随机向量 Y 的联合密度函数。

二、（10 分） 设 $(X,Y,Z)'$ 服从三元正态分布，其中

$EX=-1, EY=-2, EZ=3,\quad Var(X)=Var(Y)=Var(Z)=9,$

$\rho_{XY}=0.5, \rho_{XZ}=-1$ ，W 与 $(X,Y,Z)'$ 独立，$W\sim N(3,16)$，

求 $P(3X+2Y+5Z-2W>0)$（用标准正态分布函数表达）。

三、（15 分）设 X_n 为一列非负随机变量序列，且 $X_n\to 0, a.s.$，问是否有 $EX_n\to 0, n\to\infty$？若正确请给出证明，若不准确请给出反例。

四、(15 分)

设 X 与 Y 相互独立，$X \sim P(\lambda_1)$，$Y \sim P(\lambda_2)$，求 $E\dfrac{X}{X+Y}$，(要写出步骤)。

五、(15 分)

设 X 与 Y 是相互独立、服从指数分布的随机变量，X 与 Y 的密度函数分别为

$$f_1(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x),\quad f_2(y) = \mu e^{-\mu y} I_{(0,\infty)}(y),$$

但是 X 与 Y 不能同时被观测到，我们可观测到 $Z = \min(X,Y)$ 和 $W = I_{(Z=X)}$，其中 I_A 是事件 A 的示性函数，即

$$I_A = \begin{cases} 1, 若事件A发生, \\ 0, 若事件A不发生 \end{cases}$$

求 (Z,W) 的分布，并指出它们是独立的。

六、(共 15 分)

设 $Y = (Y_1, Y_2)'$, $X = (X_1, X_2, \cdots, X_p)'$, X 的 $p \times p$ 协方差矩阵为 $\Sigma_{11} > 0$，Y 和 X 的 $2 \times p$ 协方差矩阵为 Σ_{21}，$EX = \mu$, $EY = \eta$，一般随机向量 Y 无法观测到，我们用随机向量 X 的线性函数 $\varphi(X)$ 来估计 Y，其中

$$\varphi = (\varphi_1(X), \varphi_2(X))', \varphi_i(X) = a_{i0} + a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ip}X_p, i = 1,2。$$

在 $E\|Y - \varphi(X)\|^2 = \min$ 的准则下，

(1) (9 分) 求随机向量 $\varphi(X)$，

(2) (6 分) 求 $E\|Y - \varphi(X)\|^2$.(设 $Var(Y) = \Sigma_{22} > 0$)

七、（15 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ iid. ~ $N(\mu, 1), \mu \in (-\infty, \infty)$，求 μ, μ^2, μ^3 的 $UMVU$ 估计。

八、（15 分）设 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是总体 F 的一个样本，设总体的密度函数为 $f_\theta(x) = a(\theta)h(x)I_{(\theta_1,\theta_2)}(x)$，这儿

$$h(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1, \theta = (\theta_1, \theta_2)，\ -\infty < \theta_1 \leq \theta_2 < \infty,$$

且 $a(\theta) = (\int_{\theta_1}^{\theta_2} h(x)dx)^{-1}$，求关于该问题的二维充分统计量。

九、（共 20 分）讨论下面的分布族哪一个是指数族？（说明理由）

（1）（4 分）$(0,\theta)$ 上的均匀分布族，

（2）（4 分）$p(x,\theta) = \{\exp[-2\log\theta + \log(2x)]\}I_{(0,\theta)}(x)$,

（3）（3 分）$p(x,\theta) = 1/9, x \in \{0.1+\theta, 0.2+\theta, \cdots, 0.9+\theta\}$，

（4）（3 分）$N(\theta, \theta^2), \theta > 0$，

（5）（3 分）$p(x,\theta) = 2(x+\theta)/(1+2\theta), 1 < x < 1, \theta > 0$，

（6）（3 分）$p(x,\theta)$ 是二项分布 $B(n,\theta)$ 变量 X 关于 $X > 0$ 的条件频率函数。

十、（共 20 分），设 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 独立同分布，其公共分布是 $(0,\theta)$ 上的均匀分布。设 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，并设

$\delta_c(X)=I(M_n>c)$，

（1）（8分）求δ_c的功效函数，并证明它是θ的单调函数，

（2）（6分）在$H_0:\theta\le 1/2 \leftrightarrow H_1:\theta>1/2$的检验中，选择什么样的$c$能使$\delta_c$的水平恰为0.05?

（3）（6分）n应多大才能使（2）中的δ_c有功效0.98?