2010 年硕士学位研究生入学考试试题参考答案

（电动力学）A

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）（试题答案写在答题纸上！）

1. 如下物理量中不满足叠加性原理的是：

A. 磁感应强度 B. 波印亭矢量 C. 电场强度 D. 静电势

答： B

2. 微波谐振腔的长、宽、高分别为 4cm、3cm 以及 2cm，则电磁波最低谐振频率为：

A. 6.25 GHz B. 6 GHz C. 12.5 GHz D. 15 GHz

答： A

3. 两个相距 $2l$ 的点电荷均荷电 Q，将坐标原点设在两个电荷连线的中点，则此电荷体系的电偶极矩为：

A. $2Ql$ B. 0 C. Ql D. $6Ql^2$

答： B

4. 两荷电为 Q 的金属球半径为 r，球心相距为 $4r$，其相互作用力：

A. 大于 $\dfrac{1}{64\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}$； B. 等于 $\dfrac{1}{64\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}$；

C. 小于 $\dfrac{1}{64\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}$； D. 等于 $\dfrac{1}{16\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}$；

答： C

5. 设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$，在 V 的边界 S 上给定__________________，则 V 内的静电场唯一地确定；

A. 电荷分布 $\sigma|_S$； B. 电势 $\varphi|_S$ 以及电势的法向导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$；

C. 电势的切向导数； D. 电势 $\varphi|_S$ 或电势的法向导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$；

答： D

二、填空题与简单问答题（每小题 5 分，共 20 分）(试题答案写在答题纸上!)

1. 横截面半径为 b 的无限长直圆柱导体，均匀地流过电流 I，则储存在单位长度导体内的磁场能量为＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答：$\dfrac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

2. 两个半无限大的接地导体平面组成一个二面角，在二面角内与两导体平面等距离处放一个点电荷 Q，它的像电荷的个数为 5，则二面角的度数为＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答：60°

3. 静止质量为 m，带电量为 q 的粒子在均匀磁场 $\vec{B}$ 中作回旋运动，考虑相对论效应，它的回旋角频率为＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答：$\omega_c = \dfrac{qB}{\gamma m}$

4. 电偶极辐射在远处的能流密度随距离 r 的变化关系为＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

答：正比于 r^{-2}

三、问答和推导题（30 分）

1. 写出真空中的麦克斯韦方程组；（10 分）

答：真空中的无源麦克斯韦方程组：

$$
\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\
&\nabla\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\\
&\nabla\cdot\vec{E} = 0,\\
&\nabla\cdot\vec{B} = 0
\end{aligned}
\qquad (10分)
$$

2. 由麦克斯韦方程组导出标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 所满足的基本方程组；（10 分）

答：标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 的定义式为：

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$
$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$
(4 分)

将标势φ和矢势$\vec{A}$与$\vec{E}$、$\vec{B}$的关系式带入麦克斯韦方程组：

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

可得：

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\mu_0\vec{J}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$
(4 分)

整理可得：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi+\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi\right)=-\mu_0\vec{J}\end{cases}\qquad(1)$$
(2 分)

3. 在洛伦兹规范下，由$\vec{A}$和φ的基本方程组导出达朗贝尔方程组。;（10 分）

答：在洛伦兹规范情况下：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=0$$
(4 分)

上题(1)式可写为：

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\end{cases}$$
(6 分)

四、解析推导题（30 分）

有一沿 z 轴无限长的接地金属凹槽（如图 1 所示），其长为a，高为b，其上盖对地绝缘，电位为$\varphi=A\sin\left(\pi x/a\right)$，求槽内的电位分布。

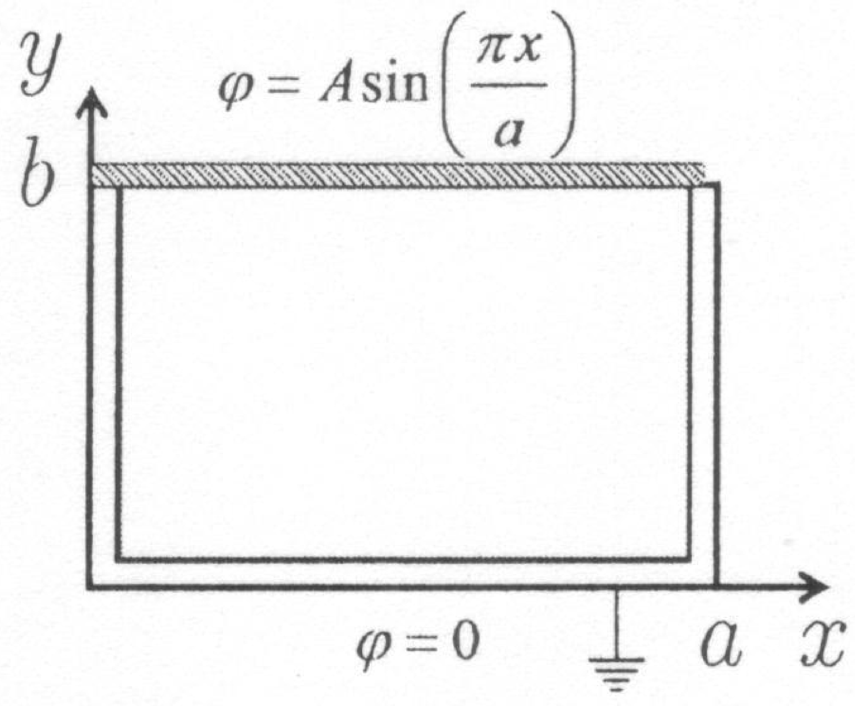

图 1（第四题图）

解：由于金属凹槽沿 z 轴无限长，故其电势在 z 方向无变化，此时槽内电势满足：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

利用分离变量法，令上式的解为：

$$\varphi(x,y)=X(x)Y(y) \qquad (4\text{ 分})$$

可得通解：

$$X(x)=\alpha\cos kx+\beta\sin kx,$$
$$Y(y)=\gamma\cosh ky+\delta\sinh ky$$

也即：

$$\varphi(x,y)=(\alpha\cos kx+\beta\sin kx)\cdot(\gamma\cosh ky+\delta\sinh ky) \qquad (4\text{ 分})$$

边界条件为：

$$\varphi(x,y)\big|_{x=0}=0 \quad , \quad \varphi(x,y)\big|_{x=a}=0\,,$$
$$\varphi(x,y)\big|_{y=0}=0 \quad , \quad \varphi(x,y)\big|_{y=b}=A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \qquad (4\text{ 分})$$

由 $\varphi(x,y)\big|_{x=0}=0$ 、$\varphi(x,y)\big|_{y=0}=0$ 可知：

$$\alpha=0 \quad , \quad \gamma=0 \qquad (6\text{ 分})$$

由 $\varphi(x,y)\big|_{x=a}=0$ 可知：

$$\beta\delta\sin ka\sinh ky=0$$

$$k=m\frac{\pi}{a} \quad , \quad m=1,2,3\cdots \qquad (4\text{ 分})$$

由 $\varphi(x,y)\big|_{y=b}=A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ 可知：

$$\beta\delta\sin kx\sinh kb=A\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$k=\frac{\pi}{a}\quad,\quad \beta\delta=\frac{A}{\sinh(\pi b/a)}\qquad\text{(4 分)}$$

故此可得：

$$\varphi(x,y)=\frac{A}{\sinh(\pi b/a)}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right)\qquad\text{(4 分)}$$

五. 解析推导题（20 分）

矩形波导管的截面的两边长分别为a和b，且满足$2b>a>b$；波导管中充满均匀介质，介电常数和磁导率分别为ε及μ。设波的频率为ω，要求波导管只允许TE_{10}通过，则波频率ω要满足什么条件？（设波沿管轴z方向传播）。

解：电磁波沿 z 方向传播，k_z表达式为：

$$k_z=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]}\qquad\text{(1) (5 分)}$$

显然，电磁波能在 z 方向传播，需满足$k_z>0$；而电磁波不能在 z 方向传播时，有$k_z<0$。

TE_{10}波能在 z 方向传播，则有：

$$\omega^2\varepsilon\mu-(\frac{\pi}{a})^2>0\text{，即，}\frac{\pi}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}<\omega\qquad\text{(2) (5 分)}$$

要使TE_{01}不能传播，则要求：

$$\omega^2\varepsilon\mu-(\frac{\pi}{b})^2<0\text{，即，}\frac{\pi}{b\sqrt{\varepsilon\mu}}>\omega\qquad\text{(3) (5 分)}$$

可以验证，若(3)式满足，则TE_{11}，TE_{20}等其他形式的波都不能传播。　(2 分)

因此，由(2)，(3)得到波导管只允许TE_{10}通过的条件为：

$$\frac{\pi}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}<\omega<\frac{\pi}{b\sqrt{\varepsilon\mu}}\qquad\text{(4) (3 分)}$$

六. 解析推导题（15 分）

在实验室参考系中，两粒子以相同速率u_1、u_2向相反方向飞行，求两粒子的相对速

度大小。

解：设静止系为Σ，粒子 1 以速度v_1相对于Σ系沿 x 正向运动，粒子 2 以速度v_2相对于Σ系沿 x 反向运动；设粒子 2 相对于Σ'静止。故Σ相对于Σ'以速度v_2沿 x 正向运动。（5 分）

设粒子 1 相对粒子 2 的速度为v，由速度合成公式有：

$$v=\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}}=\frac{c^2(v_1+v_2)}{c^2+v_1v_2} \qquad (10分)$$

七. 解析推导题（15 分）

静止质量为m_1和m_2的两粒子分别以速率u_1，u_2沿直线作相向运动，碰撞后聚合成一新粒子。求聚合粒子速度表达式。

解：设粒子m_1沿 x 轴正向运动，粒子m_2反向运动；聚合后的新粒子的静止质量为M_0，速度为 V。
由动量和能量守恒定律：

$$p_1+p_2=p \qquad (1)$$

$$w_1+w_2=W \qquad (2)\ (2分)$$

得到：

$$\frac{m_1c\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}-\frac{m_2c\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{M_0c\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \qquad (3)\ (3分)$$

$$\frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+\frac{m_2c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \qquad (4)\ (3分)$$

其中：$\beta_1=\frac{u_1}{c},\beta_2=\frac{u_2}{c},\beta_0=\frac{V}{c}$。
(3)，(4)两式相除，得到：

$$\beta_0=\frac{\frac{m_1\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}-\frac{m_2\beta_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}}{\frac{m_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}}=\frac{m_1\beta_1\sqrt{1-\beta_2^2}-m_2\beta_2\sqrt{1-\beta_1^2}}{m_1\sqrt{1-\beta_2^2}+m_2\sqrt{1-\beta_1^2}} \qquad (5)\ (4分)$$

最后得到聚合粒子速度：

$$V=\frac{m_1u_1\sqrt{c^2-u_2^2}-m_2u_2\sqrt{c^2-u_1^2}}{m_1\sqrt{c^2-u_2^2}+m_2\sqrt{c^2-u_1^2}} \qquad (6)\ (3\text{ 分})$$

2010 年硕士学位研究生入学考试试题

（电动力学）A

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）（试题答案写在答题纸上！）

1. 如下物理量中不满足叠加性原理的是：
   A. 磁感应强度 B. 波印亭矢量 C. 电场强度 D. 静电势

2. 微波谐振腔的长、宽、高分别为 4cm、3cm 以及 2cm，则电磁波最低谐振频率为：
   A. 6.25 GHz B. 6 GHz C. 12.5 GHz D. 15 GHz

3. 两个相距 $2l$ 的点电荷均荷电 Q，将坐标原点设在两个电荷连线的中点，则此电荷体系的电偶极矩为：
   A. $2Ql$ B. 0 C. Ql D. $6Ql^2$

4. 两荷电为 Q 的金属球半径为 r，球心相距为 $4r$，其相互作用力：
   A. 大于 $\frac{1}{64\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$； B. 等于 $\frac{1}{64\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$；
   C. 小于 $\frac{1}{64\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$； D. 等于 $\frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}$；

5. 设区域 V 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$，在 V 的边界 S 上给定____________________，则 V 内的静电场唯一地确定；
   A. 电荷分布 $\sigma|_S$； B. 电势 $\varphi|_S$ 以及电势的法向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$；
   C. 电势的切向导数； D. 电势 $\varphi|_S$ 或电势的法向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S$；

二、填空题与简单问答题（每小题 5 分，共 20 分）（试题答案写在答题纸上！）

1. 横截面半径为 b 的无限长直圆柱导体，均匀地流过电流 I，则储存在单位长

度导体内的磁场能量为__________________。

2．两个半无限大的接地导体平面组成一个二面角，在二面角内与两导体平面等距离处放一个点电荷 Q，它的像电荷的个数为 5，则二面角的度数为__________________。

3．静止质量为 m，带电量为 q 的粒子在均匀磁场 $\vec{B}$ 中作回旋运动，考虑相对论效应，它的回旋角频率为__________________。

4．电偶极辐射在远处的能流密度随距离 r 的变化关系为__________________。

三、问答和推导题（30 分）

1．写出真空中的麦克斯韦方程组；（10 分）

2．由麦克斯韦方程组导出标势 φ 和矢势 $\vec{A}$ 所满足的基本方程组；（10 分）

3．在洛伦兹规范下，由 $\vec{A}$ 和 φ 的基本方程组导出达朗贝尔方程组。；（10 分）

四、解析推导题（30 分）

有一沿 z 轴无限长的接地金属凹槽（如图 1 所示），其宽为 a，高为 b，其上盖对地绝缘，电位为 $\varphi = A\sin(\pi x / a)$，求槽内的电位分布。

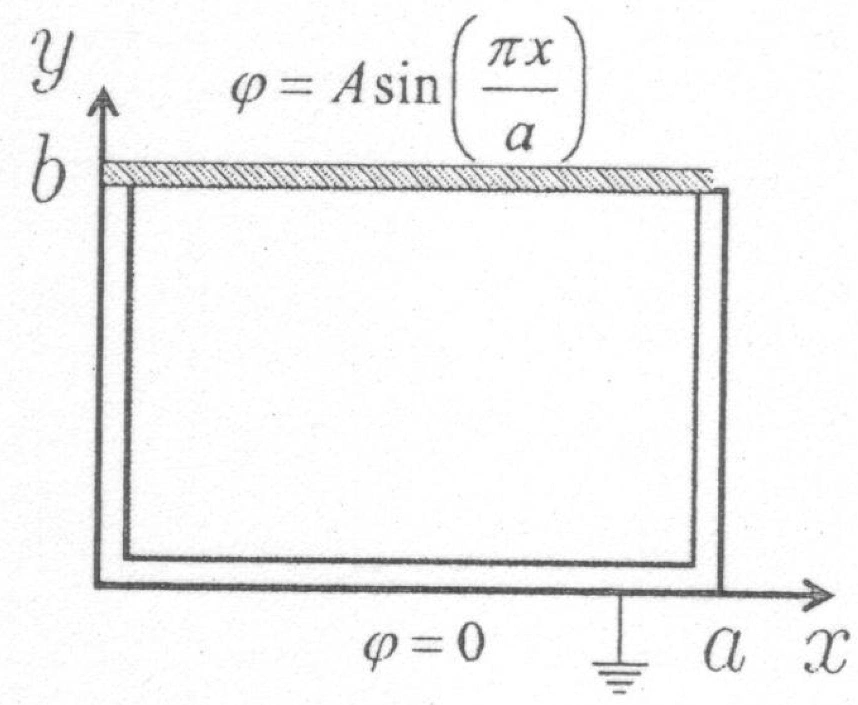

图 1（第四题图）

五. 解析推导题（20 分）

矩形波导管的截面的两边长分别为 a 和 b，且满足 $2b > a > b$；波导管中充满均匀介质，介电常数和磁导率分别为 ε 及 μ。设波的频率为 ω，要求波导管只允许 TE_{10} 通过，则波频率 ω 要满足什么条件？（设波沿管轴 z 方向传播）。

六. 解析推导题（15 分）

在实验室参考系中，两粒子以速率 v_1、v_2 向相反方向飞行，求两粒子的相对速度大小。

七. 解析推导题（15 分）

静止质量为 m_1 和 m_2 的两粒子分别以速率 u_1，u_2 沿直线作相向运动，碰撞后聚合成一新粒子。求聚合粒子速度表达式。