

中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题（本题满分 40 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。）

(1) 下列极限中不为 0 的是 ()。

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n!}$

(B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} \ln(1 + \frac{1}{n})$

(C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

(D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x} = ()$ 。

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

(3) 以下关于函数 $y = 1 + \frac{6x}{(x+3)^2}$ 的叙述正确的是 ()。

- (A) 函数图像有唯一渐近线
(B) 函数在 $(-3, 3)$ 上是单调减的
(C) 函数图像没有拐点
(D) $\frac{3}{2}$ 是函数最大值

(4) 设 L 是由曲线 $y + x = 1 (0 \leq x \leq 1)$, $y - x = 1 (-1 \leq x \leq 0)$ 和 $y = 0 (-1 \leq x \leq 1)$ 依次连接构成的曲线，方向为逆时针。则曲线积分 $\int_L (x^2 - y^2) dx + 2xy dy = ()$ 。

- (A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

(5) 设函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$, $x \in (-1, 1)$, 则 $f'(x) =$ ()。

- (A) $\frac{-2x}{1-x^2}$ (B) $\frac{2x}{1-x^2}$ (C) $\frac{-2x}{1+x^2}$ (D) $\frac{2x}{1+x^2}$

(6) 设 $f(x)$ 是定义在整个实轴 $\mathbf{R}$ 上的连续函数, 下列说法正确的是 ()。

- (A) 若 $f(x)$ 是一个偶函数, 则它的原函数是一个奇函数
(B) 若 $f(x)$ 是一个奇函数, 则它的原函数是一个偶函数
(C) 若 $f(x)$ 是一个周期函数, 则它的原函数也是一个周期函数
(D) 若 $f(x)$ 是一个单调函数, 则它的原函数也是一个单调函数

(7) 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上包含原点的一个区域, $f(x, y)$ 是定义在 D 上的连续函数。如果极限

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \frac{1 + f(x, y)}{1 + f^2(x, y)} \right)$ 存在且有限, 则 $f(0, 0) =$ ()。

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

(8) 过点 $(0, 1, 0)$, 并且与 $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 0, 2)$ 所确定的平面垂直的直线是 ()。

- (A) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ (B) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$
(C) $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$ (D) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$

二、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 连接点 $A(a, f(a))$ 与点

$B(b, f(b))$ 的线段与曲线 $(x, f(x))$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 这里 $a < c < b$ 。证明: 在 (a, b)

上存在一点 ξ , 满足 $f''(\xi) = 0$ 。

三、(本题满分 10 分) 设函数 $u = f(s(x, y, z), t(x, y, z))$, 其中 $s(x, y, z) = x + y + z$,

$t(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, 并且函数 $f(s, t)$ 存在二阶连续偏导数。证明:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + 4(x + y + z) \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} + 4(x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 6 \frac{\partial f}{\partial t}。$$

四、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x, y) = 4x + xy^2 + y^2$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值和最小值。

五、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续的单调非减函数。证明：对 $\forall c \in [a, b]$,

$$\int_a^c xf(x)dx \geq \frac{a+c}{2} \int_a^c f(x)dx。$$

六、(本题满分 10 分) 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被圆柱面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 所截部分 (即在圆柱面内部的部分) 的面积。

七、(本题满分 10 分) 计算线积分 $I = \int_L |x| y ds$, L 是 $y^2 - x^2 = 1$ 在 $y = 0$ 和 $y = 2$ 之间的部分。

八、(本题满分 10 分) 求解常微分方程 $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ 。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是定义在实数 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为基本周期的周期函数, 且在 $(0, 2\pi)$ 上, $f(x) = \frac{x}{2}$, 应用函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开证明:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots。$$

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(t) = \ln(2-t) - \ln(t+1) + \frac{3}{t+1}$, $t \in (-1, 2)$ 。证明：对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都存在唯一的 $t \in (-1, 2)$, 使得 $f(t) = x$ 。

十一、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上存在二阶连续导数, 且满足:

$$f''(x) = \cos x + f'(x), \quad f'(x) \text{ 在 } [0, 2\pi] \text{ 上的最大值为 } 2, \quad f(0) = 0。 \text{ 求 } f(x)。$$

十二、(本题满分 10 分) 设 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数, 并且在 $D \setminus \{(0, 0)\}$ 上存在连续的一阶偏导数。又设 $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ 是 D 上的连续函数, 且满足在 $D \setminus \{(0, 0)\}$ 上, $\frac{\partial f}{\partial x} = g_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = g_2$ 。证明:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = g_1(0, 0), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} = g_2(0, 0)。$$