中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 **选择题** （本题满分 50 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。）

(1) 函数$f(x)$的导函数$f'(x)$在$(-\infty,\infty)$上是连续函数，$a>0$, 则函数

$$F(x)=\begin{cases} a, & f(x)\geq a \\ f(x), & -a<f(x)<a \\ -a, & f(x)\leq -a \end{cases}$$

一定是 （ ）。

(A) 有界可微函数 (B) 有界连续函数

(C) 连续可微函数 (D) 以上结论都不正确

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+2n+1}+\dfrac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+2n+n}\right)=$（ ）。

(A) 1 (B) ∞ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(3) 函数$f(x)=(x+2\cos x)^2$ 在区间$[0,\pi/2]$上的最大值是（ ）。

(A) $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+1$ (B) $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+2$ (C) $\frac{\pi^2}{36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+3$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$

(4) 设 $f(x)=x(x+1)\cdots(x+20)$，下面四个结论正确的是（ ）。

(A) $f'(-1)>0, f'(-2)>0$ (B) $f'(-1)>0, f'(-2)<0$

(C) $f'(-1)<0, f'(-2)<0$ (D) $f'(-1)<0, f'(-2)>0$

(5) 已知 $g(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx=10$, 则$\int_0^2 f(x)dx\cdot\int_0^2 g(x)dx=$ （　　）。

(A) 20　　(B) 10　　(C) 5　　(D)不能确定

(6) $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^4+y^{12}}}$ =(　　)。

(A) 0　　(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(C) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　(D) 不存在

(7) 设$f(u)$在 $(-2,2)$ 区间内可导且$f'(u)>0$，$f(0)=0$，L为单位圆周$x^2+y^2=1$被$y=x$和 y 轴正半轴所夹的弧段，则关于弧长的曲线积分 $c_1=\int_L f(2xy)ds$ 和 $c_2=\int_L f(2x^2-1)ds$ 满足（　　）。

(A) $c_1>0,\ c_2>0$　　(B) $c_1>0,\ c_2<0$

(C) $c_1<0,\ c_2>0$　　(D) $c_1<0,\ c_2<0$

(8) 设二阶线性齐次常系数微分方程$y''+ay'+by=0$的任一解$y(x)$满足当$x\to+\infty$时 $y\to 0$，则实数a,b满足（　　）。

(A) $a>0,\ b>0$　　(B) $a>0,\ b<0$

(C) $a<0,\ b>0$　　(D) $a<0,\ b<0$

(9) 幂级数$\sum\limits_{n-1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$的收敛域是（　　）。

(A) $[-2,0)$　　(B) $(-2,0)$　　(C) $(-2,0]$　　(D) $[-2,0]$

(10) 过 $(0,0,1)$ 点且与直线$\begin{cases} x=t+1\\ y=-t-4\\ z=2t\end{cases}$ 及 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 都平行的平面方程为（　　）。

(A) $5x+2y-z+1=0$　　(B) $5x-y-3z+3=0$

(C) $3x+y-z+1=0$　　(D) $-3x-y+z+1=0$

二、(本题满分 10 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{(x^x-1)}$。

三、(本题满分 10 分) 求微分方程$y''=y'(y-3)$ 满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=-\frac{5}{2}$ 的解。

四、(本题满分 10 分) 求函数$f(x)=\pi^2-x^2$在区间 $[-\pi,\pi)$ 上的傅里叶级数。

五、(本题满分 10 分) 求曲面积分$\iint_S xydydz+z^2dxdy$，其中S为由$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的上侧（法向量与z轴正向夹角为锐角的一侧）及$z=1$的下侧围成的有向曲面。

六、(本题满分 10 分) 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=1$ 且对于 $x\ge 1$,

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)},$$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 且不大于$1+\frac{\pi}{4}$。

七、(本题满分 10 分) 设两个连续函数 f,g 满足：当$x\in[0,1]$时，$f(x)+g(x)\ne 0$。证明存在唯一的数 $0\le a\le 1$ 使得

$$\int_a^1 |f(x)|dx=\int_0^a g^2(x)dx。$$

八、(本题满分 10 分) 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_x^{2x}|\cos t|dt=\frac{2}{\pi}$。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}-xe^x\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$和$f'(x)$。

十、(本题满分 10 分) 函数$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

证明存在 $\zeta,\eta\in(a,b)$, 使得 $f'(\eta)=(b^2+ab+a^2+2)\frac{f'(\zeta)}{3\zeta^2+2}$。

十一、(本题满分 10 分) 函数$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且对任意 $x\in[0,2]$，有 $|f(x)|\le 1$ 和 $|f''(x)|\le 1$， 证明，对任意 $x\in[0,2]$，$|f'(x)|\le 2$ 成立。