

中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等代数

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。
-

1. (15 分) 求下面 $n+1$ 阶行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

其中， $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ 。

2. (15 分) 假设矩阵 A 与 B 没有公共的特征根， $f(x)$ 是矩阵 A 的特征多项式，证明以下结论：

- 1) 矩阵 $f(B)$ 可逆；
- 2) 矩阵方程 $AX = XB$ 只有零解。

3. (15 分) 设 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ 是斜对称方阵，即 $a_{i,j} = a_{n-j+1, n-i+1}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)，证明：若 A 可逆，则其逆阵也是斜对称方阵。

4. (20 分) 设二次曲面 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$ 可以经由正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化成椭圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$ ，试求 a, b 和正交矩阵 P 。

5. (15 分) 假设 3 阶实方阵 A 满足: $A^2 = E$, E 是单位方阵, $A \neq \pm E$ 。证明 $(\text{Tr}(A))^2 = 1$, 其中 $\text{Tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹。

6. (15 分) 设 A 为 n 阶半正定实矩阵。证明: $|\mathbf{A} + 2013\mathbf{E}| \geq 2013^n$, 等号成立当且仅当 $A=0$ 。其中, E 是单位矩阵。

7. (15 分) 证明: 任何一个实方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积, 其中至少有一个矩阵可逆。

8. (15 分) 设 A 是一个 3×3 正交矩阵, 证明 A 可以写成 CR , 其中 C 对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的旋转变换, R 对应于 $\mathbf{R}^3$ 的恒等变换或对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的镜面反射变换, 其中 $\mathbf{R}$ 表示实数域。

9. (10 分) 设 V 是数域 $\mathbf{F}$ 上的有限维向量空间, ϕ 是 V 上的线性变换。证明 V 能够分解成两个子空间的之和 $V = U \oplus W$, 其中, U, W 满足: 对任意 $u \in U$, 存在正整数 k 使得 $\phi^k(u) = 0$; 对任意 $w \in W$, 存在 $v_m \in V$, 使得 $w = \phi^m(v_m)$ 对所有的正整数 m 。

10. (15 分) 设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维线性空间, ϕ 是 V 上的线性变换, 满足 $\phi^2 = -\varepsilon$ (ε 是 V 上的恒等变换)。

1) 证明 n 是偶数;

2) 若 ψ 是 V 上的线性变换, 满足 $\psi\phi = \phi\psi$, 证明 $\det(\psi) \geq 0$ 。