

# 中国科学院大学

## 2013 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

### 科目名称：概率论与数理统计

#### 考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、(10 分) 假定通过验血可以诊断某种疾病，验血结果只有两种：阴性或阳性。已知当结果显示为阳性时，的确患有该种疾病的概率为 0.95，而显示为阴性时，患有该种疾病的概率为 0.02. 有一个病人到某诊所看病，他告诉医生他感觉不舒服，医生为他做了检查并验了血，在看到验血结果之前，医生认为他患病的可能性为 0.3，问在看到验血结果为阳性时该医生应如何修改他先前的判断？

二、(10 分) 有 5 个家庭，每家有 6 个孩子，问至少有 3 家育有 4 个或更多个女孩的概率是多少？（假定每家的任一个孩子的性别与其他孩子的性别相互独立而

且是女孩的概率为  $\frac{1}{2}$ ）

三、(共 30 分，每小题 15 分) 设一家超市买入数量为  $r$  的某种商品，这种商品的需求量是随机的，用  $Y$  表示（取非负整数值）。又假设每卖出一件这种商品，超市盈利  $a$  元，而贮存一件所需费用为  $b$  元。

(a) 试证：当取值为  $y$  时，超市在这种商品上的损失函数为：

$$L(y) = a(y - r) + br$$

(b) 假设  $Y$  的分布为  $P(Y = y) = p_y$ （已知），试求使超市获得平均最大盈利的  $r$  值。

四、(共 30 分，每小题 10 分) 设  $X$  的分布密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

- (a) 试求概率;
- (b) 试求  $\mathbf{F}$  的期望和方差;
- (c) 现有 100 个相互独立且与  $\mathbf{F}$  同分布的随机变量:  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots$ 。试用正态分布表示如下概率:

---

科目名称: 概率论与数理统计

第 1 页共 2 页

五、(10 分) 设有一个均匀的骰子和若干均匀硬币。掷一次骰子, 然后按照投掷的点数再抛掷相同数目的硬币, 以  $\mathbf{Y}$  记这些硬币中出现正面的个数。试求  $\mathbf{Y}$  的概率分布。

六、(共 20 分, 每小题 10 分) 设  $\mathbf{X}$  与  $\mathbf{Y}$  有如下联合密度函数:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 2\mathbf{x} + 2\mathbf{y} - 4\mathbf{x}\mathbf{y}, & 0 \leq \mathbf{x} \leq 1, \quad 0 \leq \mathbf{y} \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(a) 试求与  $\mathbf{Y}$  的边际分布密度;

(b) 试求给定  $\mathbf{x} = \frac{1}{4}$  时  $\mathbf{Y}$  的条件密度  $f_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{y} \mid \mathbf{x} = \frac{1}{4}\right)$ 。

七、(20 分) 考虑一个容量为  $n$  的样本:  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ , 它们共同的分布为

试求  $\theta$  的极大似然估计 (其中)。

八、(共 20 分, 每小题 10 分) 某学院一年级学生共 100 人, 期中考试的平均成绩为  $\mu_0$ 。期末考试后, 教员在统计成绩之前预测学生的平均成绩有所提高。

- (a) 设计一个检验, 以便考查期末考试的平均成绩是否高于  $\mu_0$  (检验水平为 5%);
- (b) 试求期末考试平均成绩的置信区间 (置信水平为 95%)。

