特别提示：答案一律写在答题纸上，写在本试题上或草稿纸上无效！

中国地质大学（北京）
2005年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学　　　　　　试题代码：310

注意：答案一律写在答题纸上，写在本试题纸上无效！！！

一. 单选题（本题共7小题，每小题3分，共21分）：

1. 设 $f(x)=\ln x+1$, $\varphi(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f(\varphi(x))=$ (A)

$A.\ \ln(\sqrt{x}+1)+1$　　$B.\ \ln\sqrt{x}+2$

$C.\ \sqrt{\ln(x+1)}+1$　　$D.\ \ln\sqrt{x}+1$

2. 当 $x\to 0$ 时，与 $e^{2x}-1$ 等价的无穷小量是 (B)

$A.\ x$　　$B.\ 2x$　　$C.\ 4x$　　$D.\ x^2$

3. $x=0$ 是函数 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ 的 (C)

$A.$ 连续点　　$B.$ 可去间断点

$C.$ 跳跃间断点　　$D.$ 无穷间断点

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 则在 $x=1$ 处函数 $f(x)$(B)

$A.$ 不连续　　$B.$ 连续且可导

$C.$ 可导，但导数不连续　　$D.$ 连续，但不可导

5. $f''(x_0)\neq 0$ 是函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有极值的 (A)

$A.$ 充分条件　　$B.$ 必要条件

$C.$ 充要条件　　$D.$ 既不充分也不必要的条件

6. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $\int df(x)=$ (A)

$A.\ f(x)+c$(c为任意常数)　　$B.\ f(x)$

$C.\ f(x)dx+c$(c为任意常数)　　$D.\ f(x)dx$

7. 设 y_1, y_2 是某个二阶常系数齐次线性方程的解，则 $c_1y_1+c_2y_2$(c_1, c_2

为任意常数) 必然是方程的 (~~C~~A)

$A.$ 通解　　$B.$ 特解

$C.$ 解　　$D.$ 全部解

二. 填空题 (本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分):

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=$ __1__ ;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln^2(2+t)dt}{xe^x}=$ __$(\ln 2)^2$__ ;

3. 设 $\begin{cases} x=te^{1+t^2}, \\ y=t+\arctan t, \end{cases}$ 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ __$\frac{2}{e}$__ ;

4. 曲线 $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$ 自 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段弧的长度为

_____ ; $\int_0^1 \frac{2e^{t}}{1+\sin 2t}dt$

5. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=$ _____ $+C$; $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}=$ __$+\infty$__ 。

三. 计算题 (本题共 7 小题，每小题 6 分，共 42 分)；

1. 设 $f(x)=\dfrac{\tan a(x-2)}{3(x-2)}$ ，若补充定义 $f(2)=\ln 2$ ，使得 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，求常数 a ； $=3\ln 2$

2. 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx$ ；

3. 设 $y=\cos e^x+\sin e^x$ ，求 $xy''-x^2y'$ ；

4. 计算 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ ；

5. 求微分方程 $(1+e^x)yy'=e^x$ 满足条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解;

6. 设 $y=\sqrt[4]{\dfrac{x(x^3+1)}{(x^3-1)^2}}$ ，计算 y' ；

7. 设 $y=\sin^3 x$ ，求 $y^{(n)}$ 。

四. (12分) 求函数 $y=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$ 的单调区间、极值及其图形的拐点。

五. (9分) 要使容积为 V 的圆柱形闭合罐子的表面积最小，求它的底面半径和高。

六. (12分) 求方程 $y''-3y'+2y=\sin\ x$ 满足条件 $y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$ 的特解。

七. (9分) 若过点 $(1,0)$ 的曲线在其上任一点 (x,y) 处的切线在纵轴上的截距等于该点的横坐标的平方，求此曲线的方程。

八. (10分) 设由曲线 $y=x^3, y=ax^2(a>0)$ 所围成的平面图形的面积等于由曲线 $y=x^3$ 、 $y=ax^2$ 和直线 $x=b(b>a)$ 所围成的平面图形的面积，求 a,b 之比。

九. (11 分) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$0\leqslant a<b\leqslant\frac{\pi}{2}$ ，证明在开区间 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1，ξ_2 ，使得

$$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\ \xi_2}{\cos\ \xi_1}.$$