

特别提示：所有答案必须写在答题纸上，做在本试卷或草稿纸上无效

中国地质大学（北京）

2007 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学

试题代码：610

一、单选题（本题共 7 小题，每小题 3 分，共 21 分）：

1. 设  $f(x) = x^2$ ,  $\varphi(x) = 2^x$ , 则  $f(\varphi(x)) = ( \quad )$

A.  $2^{x^2}$     B.  $x^{2^x}$     C.  $x^{2x}$     D.  $2^{2x}$

2. 当  $x \rightarrow 1$  时，与  $2 \arctan x - \frac{\pi}{2}$  等价的无穷小量是  $( \quad )$

A.  $4(x-1)$     B.  $2(x-1)$     C.  $x-1$     D.  $(x-1)^2$

3.  $x = \pi$  是函数  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  的  $( \quad )$

A. 连续点    B. 可去间断点

C. 跳跃间断点    D. 无穷间断点

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2, \\ \frac{x}{2} + 4, & x > 2, \end{cases}$  则在  $x = 2$  处函数  $f(x)$   $( \quad )$

A. 不连续

B. 连续且可导

C. 可导，但导数不连续

D. 连续，但不可导

5. 当  $f'(x_0) = 0$  时， $f''(x_0) > 0$  是函数  $y = f(x)$  在点  $x = x_0$  处有极小值的  $( \quad )$

A. 充分条件

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要的条件

6. 设函数  $f(x)$  连续，则  $\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) = ( \quad )$

A.  $f(x) dx$

B.  $f(x)$

C.  $f(x) + c$  ( $c$  为常数)

D.  $f'(x)$

7.  $y_1 = e^{x-1}$ ,  $y_2 = e^{x+2}$ ,  $y_3 = e^{3-x}$  都是方程  $y'' - y = 0$  的特解，则 不是



该方程的通解的是 ( ) ( $c_1, c_2$  为任意常数)

- A.  $c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_3$       B.  $c_1 y_1 + y_2 + c_2 y_3$   
C.  $y_1 + c_1 y_2 + c_2 y_3$       D.  $c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_2 y_3$

二. 填空题 (共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分):

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{(n-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}};$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arccot} t)^2 dt}{1 + \sqrt{1+x^2}} = \underline{\hspace{2cm}};$
3. 设  $y = \cos x + x e^y$ , 则  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}};$
4. 由曲线  $y = e^x$  和直线  $y = x + 1$ 、 $x = 1$  所围成的平面图形的面积为  $\underline{\hspace{2cm}};$
5.  $\int \cot^3 x dx = \underline{\hspace{2cm}} + C.$
6.  $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} = \underline{\hspace{2cm}};$

三. 计算题 (本题共 6 小题, 每小题 7 分, 共 42 分):

1. 设  $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{a}{2x}}, & x < 0, \\ 2+x^2, & x \geq 0, \end{cases}$  求常数  $a$ , 使得函数  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

2. 计算  $\int_0^{\ln 2} x^2 e^{-x} dx;$
3. 设  $y = \cos \ln x + \sin \ln x$ , 求  $x^2 y'' + x y';$
4. 计算  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4} dx;$
5. 求微分方程  $x dy - y \ln y dx = 0$  满足条件  $y|_{x=1} = e$  的特解;
6. 设  $y = (x-1) \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x^3}}$ , 计算  $y';$
7. 设  $y = \sin ax \sin bx$  ( $a, b$  为常数), 求  $y^{(n)}.$

四. (12 分) 求函数  $y = \frac{x}{(1-x)^3}$  的单调区间、极值及其图形的拐点.

五. (9 分) 若一直角三角形的一直角边与斜边长度之和为常数  $a$ , 求面积最

大的直角三角形的边长。

- 六. (12分) 求方程  $y'' - y' - 2y = e^{-x}$  满足条件  $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$  的特解。
- 七. (9分) 若过点  $(1, 1)$  的曲线在其上任一点  $(x, y)$  处的切线在纵轴上的截距等于切点到原点的距离的平方与切点的横坐标之比, 求此曲线的方程。
- 八. (10分) 设由曲线  $y = 1 - x^2, y = ax^2 (a > 0)$  所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积等于由曲线  $y = 1 - x^2$  和  $x$  轴所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转所得旋转体的体积的一半, 求  $a$  的值。
- 九. (11分) 设  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导,  $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ , 证明在开区间  $(a, b)$  内至少存在两点  $\xi_1, \xi_2$ , 使得

$$\tan a \cos^2 \xi_1 f'(\xi_1) = \cot b \sin^2 \xi_2 f'(\xi_2).$$