中国地质大学（北京）

2009年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学　　　　试题代码：610

注意：答案一律写在答题纸上，写在本试卷纸上无效!!!

一、单选题（本题共7小题，每小题3分，共21分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\le 1\\ 2, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[g(x)]=$（ A ）

A. 0　　B. 1　　C. $f(x)$　　D. $g(x)$

2. 当 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（ B ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos\pi x}{x(x^2+x-2)}+\ln(1+x)$ 间断点的个数为（ D ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设 $f(x)=\begin{cases}|x^2-1|+2x & x\ne 1\\ 2 & x=1\end{cases}$，则在 $x=1$ 处函数 $f(x)$（ B ）

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导但导数不连续　　D. 可导且导数连续

5. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（ C ）

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 某个邻域内单调增加　　D. 某个邻域内单调减少

6. 设 $g(x)$ 为可导函数 $f(x)$ 的反函数，$x>0$ 且 $\int_1^{f(x)} g(t)\,dt=\dfrac{1}{3}(\sqrt{x^3}-8)$，则 $f(x)=$（ A ）

A. $\sqrt{x}$　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$　　C. $\sqrt{x}-1$　　D. $\sqrt{x}-2$

7. 设 y_1, y_2, y_3 都是方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，且 $\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} \neq$ 常数，则该微分方程的通解为（ D ）

A. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$　　B. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$

C. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$　　D. $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

二. 填空题（本题共6小题，每小题4分，共24分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] =$ __2__.

$+t^2-t$

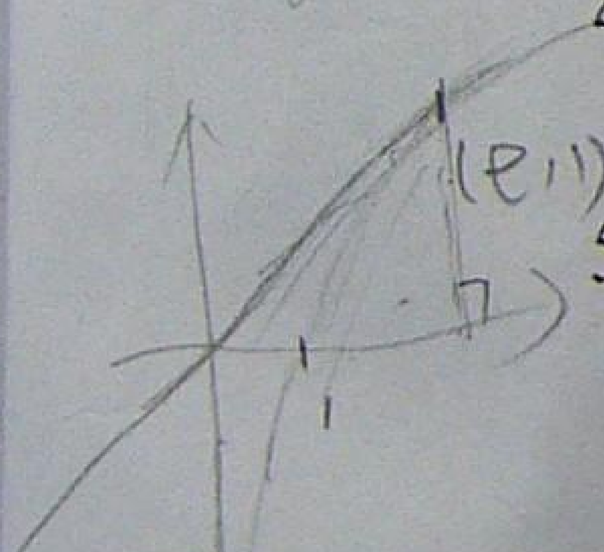
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin 5t\,dt}{\ln^2\left(1 + x^2\right)} =$ __∞__.

$\frac{dx}{dt} = 2t-1$

3. 曲线 $\begin{cases} x + t(1-t) = 0 \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$ __$\frac{dy}{dx}$__.

$dx = 2t\,dt$

4. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx =$ __$\int\sqrt{x}\,d\ln(1+x)$__ $= \ln(1+x)\cdot\sqrt{x} - \int \ln(1+x)\,d\sqrt{x}$ $= \int \ln(1+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$　　$\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1) + 1 + C$



5. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D. 则 D 的面积 $A =$ ________.

6. 以函数 $y = Cx^2 + x$（C 为任意常数）为通解的微分方程是________.

$y=1$　$x=e$

三. 计算题（本题共6小题，每小题7分，共42分）

1. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$ 处处可导，求 a, b

2. 设 $y = \frac{\sqrt[3]{2x-1}\cdot x\cdot\sin 2x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$，求 y'.

$A+B=1$　$-2A-B=1$　$B=3$　$A=-2$

3. 设 $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

$= \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$

$\frac{3}{x-2} - 2\frac{1}{x-1}$

4. 设 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{x+1}dx = A$（$A$为常数），计算 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$.

5. 求极坐标曲线 $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$，$a>0$ $(0\le\theta\le 3\pi)$ 的长.

6. 求微分方程 $xy' - x\sin\frac{y}{x} - y = 0$ 的通解.

四．（12分）求函数 $f(x)=\frac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调区间、极值、图形的拐点和渐近线.

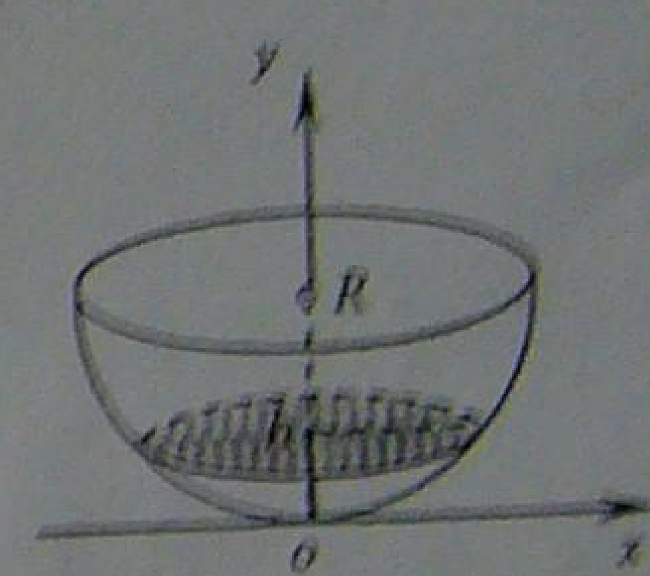
五．（12分）设曲线 $y=ax^2\ (a>0, x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于 A 点，过坐标原点 O 和 A 点的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最大？最大体积是多少？

六．（12分）求微分方程 $y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)$ 的通解.

七．（10分）若一曲线通过点 $(2,4)$，且该曲线上任一点 (x,y) 处的切线与两坐标轴和过切点且平行于纵轴的直线所围成的梯形面积等于12，求此曲线方程.

$\frac{x(y-xy'+y)}{2}=12$

八．（8分）设有半径为 R 的半球形容器，如图．现以每秒 π 立方米的速度向空容器中注水，求水深为 h 时水面上升的速度.



球形体积：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$． 面积：$S=4\pi r^2$

九．（9分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$．试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.