注:所有答案写在答题本上

2001年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

适用专业:地质专业

一、填空（每小题满分3分，共15分）

（1）设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ ________.

（2）设函数为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, 0 < x < \pi \\ 0, x \le 0 或 x \ge \pi \end{cases}$，$F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则 $x \ge \pi$ 时，

$F(x) =$ ________.

（3）设 $f(x)$ 连续，又 $x \to 0$ 时，$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t)dt$ 的导数与 x^2

为等价无穷小，则 $f(0) =$ ________.

（4）$\int_0^{4\pi} \sqrt{1-\cos(2x)}dx =$ ________.

（5）微分方程 $y''-4y'+3y = e^x \cos x + xe^{3x}$ 的通解形式为

________.

二、选择题（以下各小题答案可能不只一个，多选、错选算0分，少选扣分，每小题满分3分，共15分）

（1）当 $x \to a$ 时，（a 为常数），$f(x)$ 是（　　　　），则必有

$\lim\limits_{x \to a} (x-a)f(x) = 0$.

(A)任意函数。 (B)有极限的函数。 (C)有界函数。 (D)无穷小量。

（2）下列极限正确的有（　　　　）.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}=0$. (B) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}=1$. (D) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

（3）$f(x)$在点$x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则必有（　　　　）.

（A）$f(x)$在点$x=0$处不连续。

（B）$f(x)$在点$x=0$处连续且$f'(0)=2$。

（C）$f(x)$在点$x=0$处连续且可导，但导数未知。

（D）$f(x)$在点$x=0$处取极值。

（4）$f(x)$设在闭区间[a，b]上连续，则函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在[a，b]上一定（　　　）.

(A)连续。 （B）可导。 （C）可积。 （D）有最大值和最小值。

（5）若$f(x)$函数与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上均可导，且$f(x)<g(x)$，则必有（　　　）.

(A) $\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$ (B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. (D) $f'(x)<g'(x)$

三、简单计算题（每小题满分 4 分，共 24 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+\sin^2 x)}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} (\sin \frac{x}{2} + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

(4) 求 $\int \dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$

(5) 求 $\int_{-1}^{1} (x^2 \arcsin x + \dfrac{\arctan |x|}{1 + x^2}) dx$.

(5) 设 $f(x)$ 一阶可导，且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$，求 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

四.（满分 6 分）设 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$，求 $\int_0^1 xf(x) dx$.

五.（满分 6 分）已知 $y = y(x)$ 由方程 $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan \frac{y}{x}}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

六.（满分 6 分）设 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, x > 0 \\ x + 1, x \le 0 \end{cases}$

（1）讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性；（2）求 $f(x)$ 的极值。

七.（满分 6 分）已知方程 $x \ln x + k = 0$ 有且仅有一个实根，求 k 的取值范围。

八．（满分 6 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f'(0)=f''(0)=0$，而 $f'''(0)\neq 0$，试问 $x=0$ 是否为极值点？为什么？又 $(0,f(0))$ 是否为拐点？为什么？

九．（满分 8 分）设 $y=f(x),(x\geq 0)$ 连续可微，且 $f(0)=1$，现已知由曲线 $y=f(x)$，x 轴，y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线所围成的平面图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长相等，求 $f(x)$.

十．（满分 8 分）设 $f''(x)>0, 0\leq x\leq 1$，证明：$\int_0^1 f(x^2)dx\geq f(\frac{1}{4})$.