中国地质大学（北京）
2003 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学　　　　　　试题代码：310

一、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$，则 $a=$ $\frac{1}{8}-1$ $b=$ -16.

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y^2)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ $-\frac{1}{2}$.

3. 不定积分 $\int x^x(1+\ln x)\,dx=$ x^x+C.

4. 已知 $f(x)$ 是连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt=$ $af(a)$.

5. 微分方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{2}}=e$ 的特解是 $\ln y=|\csc x+\cot x|$

二、选择题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是(B).

(A)、$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\alpha$（$\alpha$ 为实数）；　(B)、$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$；

(C)、$\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)$；　(D)、$\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin f(x)$。

2. 设函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 与二阶导数 $f''(x)$ 存在且均不为零，其反函数为 $x=\varphi(y)$，则 $\varphi''(y)=($　　$)$.

(A)、$\dfrac{1}{f''(x)}$；　(B)、$-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^2}$；　(C)、$\dfrac{[f'(x)]^2}{f''(x)}$；　(D)、$-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$。

3. 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\alpha(x)$ 是函数 $\beta(x)$ 的(C).

(A)、高阶无穷小；　(B)、低阶无穷小；

(C)、同阶但不等价的无穷小；　(D)、等价无穷小。

4. 设函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量为 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$(D).

(A)、2π；　(B)、π；　(C)、$e^{\frac{\pi}{4}}$；　(D)、$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$。

5. 函数 $y=y(x)$ 的图形上点 $(0,-2)$ 的切线为 $2x-3y=6$，且 $y(x)$ 满足微分方程 $y''=6x$，则函数 $y(x)=$(C).

(A)、$y=x^3-2$；　(B)、$y=3x^2+2$；

(C)、$3y-3x^3-2x+6=0$；　(D)、$y=x^3+\dfrac{2}{3}x$。

三、计算题（共6小题，每小题10分，共60分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2\sin x}$.

2. 设 $f(x)$ 对任意的实数 x, y 满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f'(0)=1$，求 $f'(x)$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=\dfrac{1}{4}$.
求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2 f\left(\dfrac{1}{n}\right)}$.

4. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,dx$.

5. 计算定积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^5+2x^4-5x^3+2x^2+x^2\sin^3 x}{1+x^2}\,dx$.

6. 设由 $y=4-x^2$、Ox 轴上线段 $[-2,0]$ 及 $y=3x$ 所围成的位于上半平面的图形为 σ，试求由 σ 绕 Ox 轴旋转一周所成的旋转体体积.

ロ示 四、(12分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\le x\le 1}f(x)=-\dfrac{1}{2}$.
试证明：$\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge 4$.

五、(12分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内存在二阶导数，且 $f''(x)\le 0$，又 $f(0)=0$，证明：对于 $(0,1)$ 内的任何一点 a，都有 $f(a)\le 2f\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

w示 六、(12分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，证明：存在 $\theta\in(0,1)$，满足

泰勒公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(\theta).$$

七、(12分)设 $f(x)=\sin x-\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

八、(12分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>0$，$f(a)>0$。试证：对图中所示的两块面积 $S_1(x)$ 和 $S_2(x)$，存在唯一的 $\xi\in(a,b)$，使得

$\xi\in(0,1)$

$$\frac{S_1(\xi)}{S_2(\xi)}=2003.$$

$\int_0^1 f(x)dx =$ ~~...~~ $f(\xi)\times 1$

有 $\theta\in(0,\xi)$

$\exists\ \dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=f'(\theta)$