考试科目：高等数学

适用专业：地质专业

所有试题答案写在答题本上，答案写在试卷上无效

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.）

（1）已知当 $x \to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

(2) 设 $\sin x^2$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int x^2 f(x)dx=$ ________________.

（3）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(|x|+x\right)\cos x dx=$ ________________.

（4）设 $y=e^{-f(x)}f\left(e^{-x}\right)$，其中函数 $f(x)$ 有连续的导函数，则 $dy=$ ________________
________.

（5）$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(x-t)^2\,dt=$ ________________.

（6）通解为 $y=C_1e^x+C_2x$ 的微分方程是________________.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

（1）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)\sin\frac{1}{|x|}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \frac{1}{x}\int_0^x \sin\left(t^2\right)dt, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在.　　（B）极限存在，但不连续.

（C）连续，但不可导.　　(D) 可导.

（2）$x=0$ 是 $f(x)=\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}$ 的（　　）间断点.

（A）跳跃.　　（B）可去.　　（C）无穷.　　(D)振荡.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，若 $f(-x)=f(x)\,(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$.　　　(B) $f'(x)>0, f''(x)<0$.

(C) $f'(x)<0, f''(x)>0$.　　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(4) 设 $\int_0^x f(t)\,dt=\dfrac{x^4}{2}$，则 $\int_0^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})\,dx=$（　　）.

(A) 16.　　(B) 8.　　(C) 4.　　(D) 2.

(5) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 与直线 $x=a, x=b$ 所围成的平面图形面积为（　　）.

(A) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.　　　(B) $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

(C) $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$.　　　(D) $\int_a^b (|f(x)|-|g(x)|)\,dx$.

(6) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续导数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则（　　）

(A) $f(1)$ 取极大值.　　　(B) $f(1)$ 取极小值.

(C) $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(1)$ 不取极值，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分.）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}+\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]$.

(2) 设 $y=x^{\alpha\frac{1}{x}}+\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，$(x>0)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

(3) 求积分 $\int x\tan x\sec^4 x\,dx$.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\int_0^{\theta}\dfrac{\sin u}{u}du \\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta \end{cases}$，$(0<\theta<\pi)$ 所确定，试求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（5）设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，求 $\int_0^{\pi}f(x)dx$.

四.（本题满分 12 分）

设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$，其中函数 $g(x)$ 具有二阶连续导数，且 $g(0)=1$.

（1） 确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 为连续函数；

（2） 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五.（本题满分 12 分）

设 $x_n=\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 当 $x\geq 0$ 时具有连续导函数，且 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(0)=1$，现已知由曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线所围成的平面图形的面积与曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的一段弧长值相等，求函数 $f(x)$.

七.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，试证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$.

八.（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 满足方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$，且由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小，试求 D 的面积.

九.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$，

证明：

（1） 存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；

（2） 对任意 $\lambda\in R$，必存在 $\xi\in(0,x_0)$，使得 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$；

（3） $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值大于 1.