中 … 硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

适用专业：地质专业

所有试题答案写在答题本上，答案写在试卷上无效

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分。）

（1）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{\frac{x}{3}}=8$，则 $a=$________。

(2) 已知 $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}dx=x^2+C$，则 $f(x)=$________。

（3）$\dfrac{d}{dx}\int_0^x\cos(x-t)^2\,dt=$________。

（4）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x+\sin 2x\right)|\sin x|dx=$________。

（5）微分方程 $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为________。

（6）设 $y=e^{f(x)}f\left(e^{-x}\right)$，其中函数 $f(x)$ 有连续的导函数，则 $dy=$________

________。

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。）

（1）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(1+x^2\right)\sin\dfrac{1}{|x|}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\sin\left(t^2\right)dt, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）。

（A）极限不存在。　　（B）极限存在，但不连续。

（C）连续，但不可导。　　(D) 可导。

（2）曲线 $y=\dfrac{x|x|}{(x-1)(x-2)}$ 的渐近线，共有（　　）。

（A）1 条.　　（B）2 条.　　（C）3 条.　　（D）4 条.

（3）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为（　　）.

（A）不存在间断点.　　（B）存在间断点 $x=1$.

（C）存在间断点 $x=0$.　　（D）存在间断点 $x=-1$.

（4）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，若 $f(-x)=-f(x)\ (-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

（A）$f'(x)<0, f''(x)<0$.　　（B）$f'(x)>0, f''(x)<0$.

（C）$f'(x)<0, f''(x)>0$.　　（D）$f'(x)>0, f''(x)>0$.

（5）设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\,dt,\ g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）.

（A）低阶无穷小.　　（B）高阶无穷小.

（C）等价无穷小.　　（D）同阶但非等价无穷小.

（6）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有连续导数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则（　　）.

（A）$f(1)$ 取极大值.　　（B）$f(1)$ 取极小值.

（C）$(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$f(1)$ 不取极值，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

三、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分.）

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+\sin^2 x)}$.

（2）计算 $\int (x\ln x)^2(1+\ln x)\,dx$.

（3）已知 $e^{x+y}=xy$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

（4）计算曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$，从 $x=1$ 到 $x=e$ 一段弧的长度.

（5）求曲线 $\rho = a(1-\cos\theta)\ (a>0)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线斜率.

四.（本题满分 12 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\left(e^{2x}-1\right), & x<0\\ a+\sin(bx), & x\ge 0\end{cases}$，试确定常数 a，b 的值，使得 $f(x)$ 处处可导，并求 $f'(x)$.

五.（本题满分 12 分）

计算 $I=\int_0^1 x\left|x-a\right|dx$，其中 a 为常数.

六.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，且 $f(0)=0$，$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=1$，求 $f(x)$.

七.（本题满分 12 分）

当 $x\ge 0$，n 为自然数时，设 $f(x)=\int_0^x\left(t-t^2\right)\sin^{2n}t\,dt$，证明 $f(x)\le\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$

八.（本题满分 12 分）

设函数 $y(x)\ (x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$，过曲线 $y=y(x)$ 上任意点 $P(x,y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积为 S_1，区间 $[0,\ x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲线的曲边梯形的面积为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求曲线 $y=y(x)$ 的方程.

九.（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=1$，

证明：

（1） 存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(x_0)=x_0$；

（2） 对任意 $\lambda \in R$，必存在 $\xi \in (0, x_0)$，使得 $f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi) = 1$；

（3） $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值大于 1.