中国地质大学（北京）
2006年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等数学　　　　试题代码：310

注意：答案一律写在答题纸上，写在本试卷纸上无效!!!

一. 单选题(本题共7小题，每题 3分，共21分)

1. 下列函数无界的是（ A ）

A. $\dfrac{2x}{1+x^2}, x\in R$　　B. $\dfrac{\ln x}{x}, x\in[\frac{1}{2}, 1]$

C. $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}, x\in(0, +\infty)$　　D. $\dfrac{\sin x}{x}, x\in(0, 1)$

2. 当 $x\to 0$ 时，$\arctan 3x$与$\dfrac{ax}{\cos x}$是等价无穷小，则 $a=$（ C ）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. $f(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} & x>0 \end{cases}$，则间断点$x=0$是（ D ）

A. 可去间断点　　B. 无穷间断点

C. 振荡间断点　　D. 跳跃间断点

4. $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x<0 \\ x^2+x, & x\ge 0 \end{cases}$，　在$x=0$处函数$f(x)$（ D ）

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导但导数不连续　　D. 可导而且导数连续

5. 下列说法正确的是（ C ）

f(x)在x0处可导且x0处取得极值，(充要条件)则f'(x0)=0

A. 若 $f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$必是极值

B. 若 $f(x_0)$是极值，则 $f(x)$在x_0可导且$f'(x_0)=0$

C. 若 $f(x)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$是$f(x_0)$为极值的必要条件

D. 若 $f(x_0)$在点x_0可导，则$f'(x_0)=0$是$f(x_0)$为极值的充分条件

特别提示：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

6. 设 $F'(x)=f(x)$，则 $\int dF(x)=($ D $)$

A. $f(x)$ B. $F(x)$ C. $f(x)+C$ D. $F(x)+C$

7.函数$y=C_1e^{2x+C_2}$(其中C_1,C_2为任意常数)是微分方程 $y''-y'-2y=0$的( )

$r^2-r-2=0$ $(r-2)(r+1)$

A. 通解 B. 特解 C. 解但不是通解,也不是特解 D. 不是解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$

二. 填空题(本题共6小题，每题4分，共24分)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)=$ ~~1/2~~ $\frac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\tan t\,dt}{\sin^4 t}=$ 0 0

$x=1$时 $y=1$ $x^y=2x-y$

$\frac{1}{y}\ln x+y\frac{1}{x}=$

3. 函数$y=y(x)$ 由方程 $x^y-2x+y=0$ 确定，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$ 1

$\Rightarrow y'=1$

4. $\int\dfrac{dx}{x(1+x^6)}=$ ~~$\frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1}$~~ $\Big| = \frac{1}{6}\ln\frac{x^6+1}{x^6}+C = \frac{1}{6}\ln\frac{x^6}{x^6+1}+C$

5. 曲线$\begin{cases}x=t^3+1\\ y=\frac{3}{2}t^2-1\end{cases}$ $(0\le t\le1)$ 的弧长是 $2\sqrt{2}-1$ $2\sqrt{2}-1$ $\int_0^1\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$

6. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}=$ $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4}$ $\int_0^{\infty}\frac{de^x}{e^{2x}+1}=-\int_0^{\infty}\frac{de^x}{(e^x)^2+1}=\int_{\infty}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$

$\arctan x\Big|_{\infty}^{1}$

三. 计算题(本题共6小题，每题7分,共42分)

极限相等 系数相等

1. 设 $f(x)=\begin{cases}a\cos 2x+bx & x\le0\\ \frac{1}{x}\left(1-e^{x^2}\right)+3 & x>0\end{cases}$，确定$a$，$b$使$f(x)$在$x=0$处可导.

$a=3$ $b=5$

$a=3$，$b=-1$

2. 设 $f(x)=\cos\left[e^{2x}-\ln(1+3x^2)\right]$ 求 $df(x)$.

$-\sin\left[e^{2x}-\ln(1+3x^2)\right]\left[2e^{2x}-\frac{6x}{1+3x^2}\right]$

3. 计算 $\int_{-1}^{2}\left|x^2-x\right|dx$ $x^2-x\ge0$ $x(x-1)>0$

$-1<x<1$ 时 $x^2-x>0$

$x<-1$ 时 $x^2-x<0$

$x>1$

$\int_{-1}^{1}(x-x^2)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$

$=\frac{5}{3}$ $=\int_{-1}^{0}(x^2-x)\cdot dx+\int_0^1(x-x^2)\cdot dx+\int_1^2(x^2-x)\cdot dx$

4. 计算 $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx$ $= \int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\, d\sqrt{x^2+1} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx$

$= \ln(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1} - x$

5. 设 $y=\frac{x^4}{x-1}$, 求 $y^{(2005)}$ $= -\frac{1}{2005!\,(x-1)^{2006}}$ $\left[\frac{1}{x-1}\right]^{(2005)}$

6. 已知 $f(x)$ 为可导函数且满足方程 $\int_0^x tf(t)dt = x^2 + f(x)$ 求 $f(x)$.

$f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 2$

四.(15分)求函数 $y=x-2\arctan x$ 的单调区间、极值、拐点和渐近线

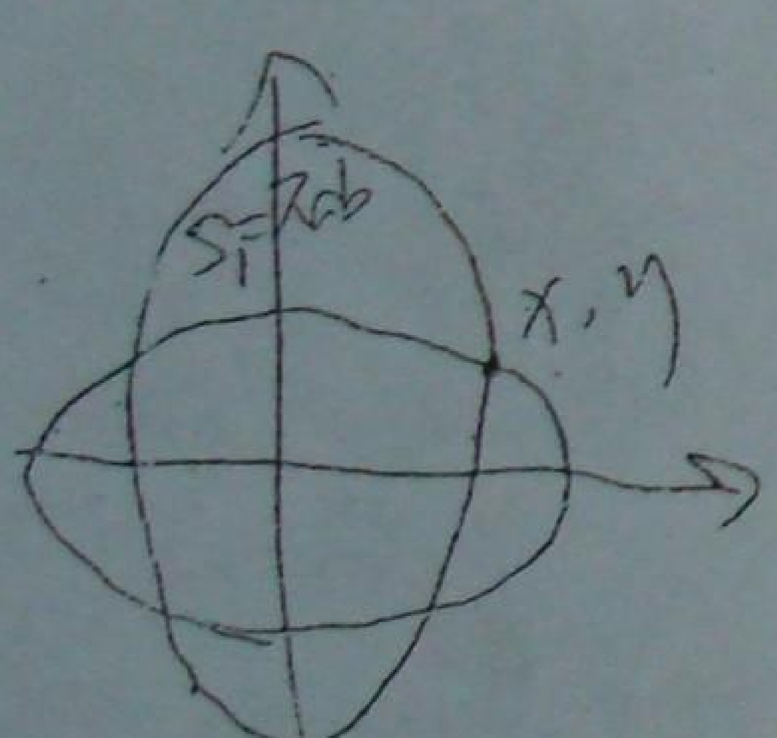
$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\uparrow$ $[-1,1]\downarrow$

五.(11分)周长为 $2l$ 的等腰三角形绕其底边旋转形成旋转体，求所得体积为最大的那个三角形.

$t=\frac{1}{2}l$

六.(12分)计算两椭圆 $x^2+\frac{1}{3}y^2=1$ 和 $\frac{1}{3}x^2+y^2=1$ 的公共部分的面积.

$\frac{1}{4}\pi ab - \int_0^x f_2(x)dx + \int_0^x f_1(x)dx$



七.(15分)求微分方程 $y''-4y'+4y=8x^2+e^{3x}$ 的通解.

$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+2x^2+x-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}e^{3x}$

八.(10分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(0)=f(1)=1$，$f'(1)=1$ 证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=2$.

四: 水平渐近线: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$

铅直渐近线: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

斜渐近线: $y=ax+b$. $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)$

$\therefore a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2\arctan x}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty} -2\arctan x=-\pi$

$\therefore y=x-\pi$

八. 泰勒公式: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$

设 $x=0$. $x_0=1$

$\therefore f(0)=f(1)+f'(1)(0-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-1)^2$

$1=1-1+\frac{f''(\xi)}{2}$

$\therefore f''(\xi)=2$