硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

所有试题答案一定要写在答题纸上，写在试卷上无效！

一、填空题（每题 6 分，共 30 分）

1．多项式 $f(x)=x^3+6x^2+7x-6$ 与 $g(x)=x^2+x-6$ 的最大公因式为（　　　　　　）。

2．若齐次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-9x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+8x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

有非零解，则 $\lambda=$（　　　　　　）；系数矩阵的秩为（　　　　　　）。

3．若 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 满足 $AB=B+E$，求 $B=$（　　　　　　）。

4．已知$\mathbf{R}^3$中的两组基 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，其中

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \beta_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};$$

则 $B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 到 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的过渡矩阵为

（　　　　　　　　　　）。

5．已知 $A=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&0&2\\0&2&y\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&x&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似，则 x,y 分别为

（　　　　　　　　）。

二、选择题：（每题 6 分，共 30 分）

1. 已知一次多项式 $x-a$（a 是实数）整除多项式 $f(x)=x^3-2x^2+x-2$，则 $x-a$ 除多项式 $g(x)=-x^5+2x^4-x^3+2x-1$ 的余数为

（A）5 （B）1 (C) −1 (D) −5

2. 若 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A|$ 为

（A）$|A|=|A^*|^{-1}$;（B）$|A|=|A^*|^{\frac{1}{n-1}}$;（C）$|A|=|A^*|^{-n}$;（D）$|A|=|A^*|^{n-1}$。

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性空间 $V(\mathbf{R})$ 上的一组线性无关的向量，同时 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+t\alpha_3,\beta_3=t\alpha_1+\alpha_2$ 也是 $V(\mathbf{R})$ 上的一组线性无关的向量，则

(A) $t\neq 0$;(B) $t=1$ 或 $t=2$；(C) $t\neq 0$ 且 $t\neq \frac{1}{2}$；（D）$t\neq 0$ 且 $t\neq 2$。

4. 若 $A=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1\\ \lambda & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ 是正定矩阵，则

(A) λ 是任意数；(B) $0<\lambda<\frac{4}{5}$；(C) $-\frac{4}{5}<\lambda<\frac{4}{5}$；(D) $-\frac{4}{5}<\lambda<0$。

5. 已知 $\beta_1=[-2\quad -1\quad -3\quad 1]^T$，$\beta_2=[-1\quad 1\quad -3\quad 1]^T$，

$\beta_3=[-4\quad -5\quad -3\quad 1]^T$，$\beta_4=[-1\quad -5\quad 3\quad -1]^T$，则

$\dim[L(\beta_1,\beta_2)\cap(\beta_3,\beta_4)]=$

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 3;　　(D) 0。

三、（本题 15 分）a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=b\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=a\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\\quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\end{cases}$$

有解，在有解的情况下，求一般解。

四、（本题 15 分）设 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 V^4 的一组基，已知线性变换 σ 在基 $B_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 下对应的矩阵是 A，即 $\sigma B_\alpha=B_\alpha A$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix},\qquad \begin{cases}\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4\\ \beta_2=3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4\\ \beta_3=\alpha_3+\alpha_4\\ \beta_4=\alpha_4\end{cases}$$

求 σ 在基 $B_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ 下对应的矩阵 B。

五、（本题 15 分）求一正交矩阵 P，将下列二次型化成标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3。$$

六、（本题 15 分）设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq0$，证明：

$$\big(f(x),g(x)\big)=\big(f_1(x),g_1(x)\big)$$

其中 $\big(f(x),g(x)\big)$ 为多项式 $f(x),g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；$\big(f_1(x),g_1(x)\big)$ 为多项式 $f_1(x),g_1(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；

五、（本题 15 分）求一正交矩阵 $\mathbf{P}$，将下列二次型化成标准型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3\text{。}$$

六、（本题 15 分）设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq 0$，

证明：

$$\big(f(x),g(x)\big)=\big(f_1(x),g_2(x)\big)$$

其中 $\big(f(x),g(x)\big)$ 为多项式 $f(x),g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；

$\big(f_1(x),g_1(x)\big)$ 为多项式 $f_1(x),g_1(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式；

七、（本题 15 分）已知椭球面 $U=\{x\in\mathbb{R}^3:x^TAx=1\}$，其中 A 是三阶实对称正定矩阵，现给定正交变换 $y=Px$，其中 P 为三阶可逆矩阵，构造 $PU=\{y=Px;x\in U\}$，

证明：集合 PU 仍然是一个椭球面且椭球面的大小没有发生变化。

八、（本题 15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 为线性空间 V 的一组基，A 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

证明：$\dim L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=rankA$，其中 $\dim L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 是生成空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 的维数，$rankA$ 为 A 的秩。