一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.）

（1）设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, & x<-1,\\ b, & x=-1,\\ a+\arccos x, & x>-1\end{cases}$ 在$x=-1$处连续，

则常数 $a=$ ______，$b=$ ______．

（2）计算积分 $I=\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$ ______．

（3）计算 $I=\int_{-1}^1 x(1+x^{2005})(e^x-e^{-x})\,dx=$ ______．

（4）极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}=$ ______．

（5）已知函数 $f(x)$满足 $xf(x)=2+\int_1^x 2f(x)dx$，则 $f(x)=$ ______．

（6）以 $y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x$ 为通解的常系数线性齐次微分方程为：

______．

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

(1)　设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$几个数的大小顺序是(　)

(A)　$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　　(B)　$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C)　$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　　(D)　$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

（2）已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，其中$a$，$b$是常数，则（　）

（A）$a=b=7$　　　　（B）$a=-7$，$b=6$

（C）$a=6$　$b=-7$　　　　（D）$a=b=-7$

（3）函数$f(x)=\int_0^{x^2} e^{t^2}dt$，则极限$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}$等于（　）

(A) $4xe^{x^4}$　　　　(B) $2e^{x^2}$

(C) $2xe^{x^4}$　　　　(D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}$

（4）已知函数$f(x)$连续，则“$f'(x_0)=0$”是“函数$f(x)$在x_0取得极值”的（　）

(A) 充分条件　　　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　　　(D) 既不充分也不必要条件

（5）设函数$f(x)$连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　)

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$　　　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$　　　　(D) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

(6) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有间断点，则（ ）.

（A）$g[f(x)]$ 必有间断点 （B）$f[g(x)]$ 必有间断点

（C）$[g(x)]^2$ 必有间断点 （D）$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 必有间断点

三．计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分.）

（1） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\,dt}{x\sin x}$

（2） 设 $x>0$，求导数 $\dfrac{d\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}{d\sqrt{x}}$

（3） 设函数 $y=f(x)$由方程 $\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$ $(x>0, y>0)$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

（4） 设$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，其中 $f(t)$ 为三阶可导且 $f''(t)\neq 0$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5) 已知 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$, 求 $I=\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

四．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(x+\sin^{2n}x)$，试讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

四．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}(x+\sin^{2n}x)$，试讨论 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

五．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geq(b-a)^2.$$

六．（本题满分 12 分）

设函数 $y=f(x)$ 的图形与曲线 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

七．（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 可导，对任意 $x \in (0,1)$ 有 $f(x) \neq 0$，

证明：存在 $c \in (0,1)$ 使 $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$．

八．（本题满分 12 分）

一容器的内表面是由曲线 $x = y + \sin y \left(0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面，如果以 $\pi\, m^3/s$ 的速率注入液体，求当液面高度为 $\dfrac{\pi}{4}\, m$ 时液面上升的速率．

九．（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证：对任意给定的正数 a, b 在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ, η 使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$